

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M. Ing.

PAR  
RHÉAUME, François Etienne

SIMULATION DU COMPORTEMENT EN TORSION D'UN DÉMULTIPLICATEUR  
HARMONIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

MONTREAL, LE 31 OCTOBRE 2007

© François Etienne Rhéaume, 2007

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Henri Champlaud, directeur du mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Zhaoheng Liu, codirecteur du mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Louis Lamarche, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Patrick Terriault, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 31 OCTOBRE 2007

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier sincèrement les professeurs Henri Champliand et Zhaoheng Liu pour leurs judicieux conseils ainsi que leur grande disponibilité. Je remercie aussi ma copine Dominique, mes parents et ma famille. Je n'aurais pu compléter ce projet sans leur support.

# SIMULATION DU COMPORTEMENT EN TORSION D'UN DÉMULTIPLICATEUR HARMONIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

RHÉAUME, Francois Etienne

## RÉSUMÉ

Idéalement, les organes de transmission utilisés dans les mécanismes devraient avoir un fonctionnement dit transparent et ne devrait donc pas induire des effets indésirables lors des transferts de puissance qu'ils exécutent. En réalité, tout système de transmission induit des vibrations, est flexible et absorbe une partie de la puissance de la source. Le principe de fonctionnement des démultiplicateurs harmoniques, un type de transmission souvent utilisé en robotique, est basé sur la déformation élastique d'une de ses composantes. La rigidité en torsion des démultiplicateurs harmoniques n'est pas linéaire en fonction de la charge appliquée. Ce comportement est difficilement prédictible analytiquement à cause des déformations complexes subies par ces composantes. De plus, l'influence de la flexibilité de chacune de ces composantes (le flexible spline, le circular spline et le wave generator) sur la flexibilité totale du démultiplicateur harmonique n'est pas mentionnée explicitement dans la littérature.

Ce travail est constitué de deux approches distinctes utilisant la méthode des éléments finis pour modéliser les déformations des composantes du DH induites par la torsion. Pour la première approche, des hypothèses simplificatrices furent émises pour simplifier le modèle. Les dents du flexible spline et du circular spline ont été considérées rigides en torsion et seulement leur flexion a été modélisée. Les dents du flexible spline étaient libres de glisser sur un wave generator elliptique et parfaitement rigide. La flexibilité des autres parties du flexible spline a aussi été évaluée. Cette approche a permis de reproduire le phénomène de non-linéarité en torsion du démultiplicateur harmonique. Cependant, la rigidité déterminée de cette façon était bien plus élevée que celle indiquée par le manufacturier.

L'autre modèle développé considère plus de composantes du réducteur harmonique comme étant flexibles. La rigidité des billes du wave generator a été évaluée et l'engrènement des dents est maintenant modélisé en trois dimensions permettant à celles du flexible spline de se déformer par torsion. En se basant sur les résultats d'une modélisation faite pour le premier modèle, le circular spline a été considéré rigide pour diminuer le temps de calcul.

Les résultats de ces modèles présentés aux ANNEXES I et II démontrent respectivement la nécessité de modéliser le phénomène d'engrènement des dents du flexible spline et du circular spline en trois dimensions pour que les surfaces de contact entre ces composantes ne soient pas surestimées comme dans l'approche bidimensionnelle. Le modèle présenté à l'ANNEXE II permet d'évaluer la rigidité du démultiplicateur harmonique avec un écart d'environ 20% par rapport aux données du manufacturier. Aussi, il a été conclu que la



flexibilité du wave generator induit environ 20% de la flexibilité en torsion du démultiplicateur harmonique modélisé. Le modèle présenté est aussi intéressant puisqu'il peut être utilisé pour réaliser des analyses de contraintes sur le flexible spline ainsi que pour évaluer la vie utile du wave generator. Par contre, le couplage de certains nœuds des éléments coques et des éléments solides du flexible spline induit des contraintes trop élevées localement. Cela doit être considéré si l'on analyse cette zone du FS.

**Mots-clés :** démultiplicateur harmonique, rigidité en torsion, méthode des éléments finis

# MODELING THE TORSIONAL STIFFNESS OF HARMONIC DRIVE THROUGH FEA

RHÉAUME, François Etienne

## ABSTRACT

Ideally, the operation of transmission devices should not create any undesirable effect to the system it is coupled to. In fact, all transmission devices induce vibrations, are flexible and have a variable efficiency depending on the operating conditions. The operation principle of harmonic drives is based on the elastic deformation of one of its components: the flexible spline. Due to this deformation, the torsional stiffness of this mechanism is non linear with respect to the load it carry. This behavior cannot be easily evaluated with analytical formulations. Also, this phenomenon is not suitable for most of the applications and is not explained throughly in litterature.

The work presented herein is composed of two different approaches using the finite element method to model the torsional stiffness of a harmonic drive. In the first approach, the teeth of the circular and of the flexible spline were deemed rigid in torsion. Only the effects of their bending and sliding over a perfectly rigid elliptical wave generator have been considered. The flexibility of the other parts of the flexible spline has also been evaluated. This technique proved to replicate the non linearity of the torsional stiffness of the harmonic drive. However, the stiffness values computed were too rigid compared to the ones provided from the harmonic drive manufacturer.

In the second attempt, all components of the harmonic drive have been considered flexible at the exception of the circular spline and the part located inside the balls path of the wave generator.

ANNEXES I and II shows the results obtained with both approaches. Based on these analyses, it is clear that the torsional stiffness of a harmonic drive can not be correctly evaluated using a 2-D approach of the meshing phenomenon of the flexible spline and of the circular spline. This overestimates the contact areas resulting in greater stiffness than supposed. The second approach is able to predict the torsional stiffness of a harmonic drive. For the model evaluated with the second approach, the relative error of its stiffness computed was within 20% of the manufacturer specifications. Experiments have also shown that the flexibility of the wave generator contributes to approximately 20% of the total flexibility for the harmonic drive considered.

**Keywords:** Harmonic drive, strain wave gearing, torsional stiffness, finite element analysis

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	3
1.1 Historique et principes de fonctionnement des démultiplicateurs harmoniques .....	3
1.1.1 Historique du démultiplicateur harmonique .....	3
1.1.2 Principes de fonctionnement des DH.....	3
1.2 Présentation des travaux sur les DH .....	8
1.2.1 Recherches orientées sur les enjeux à considérer lors du fonctionnement des DH.....	8
1.2.1.1 Erreur cinématique des DH.....	8
1.2.1.2 Rigidité en torsion des DH.....	10
1.2.1.3 Pertes par friction des DH.....	11
1.2.1.4 Modèles dynamiques d'asservissement des DH .....	12
1.2.2 Recherches orientées vers le développement des DH.....	15
1.2.2.1 Profil de la dentition du FS et du CS et géométrie du WG.....	15
1.2.2.2 Utilisation des matériaux composites .....	16
1.2.2.3 Analyses expérimentales et modélisations par éléments finis .....	18
CHAPITRE 2 COMPLÉMENT D'INFORMATIONS DE L'ARTICLE <i>ON THE COMPUTING OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A HARMONIC DRIVE USING FEA</i> .....	21
2.1 Présentation du M.E.F.....	21
2.1.1 Hypothèses simplificatrices considérées.....	21
2.1.2 Considérations importantes pour la modélisation de l'engrènement du FS et du CS.....	22
2.1.3 Discussion à propos des résultats obtenus .....	22
2.1.4 Informations complémentaires.....	23
CHAPITRE 3 COMPLÉMENT D'INFORMATIONS DE L'ARTICLE <i>UNDERSTANDING AND MODELING THE TORSIONAL STIFFNESS OF HARMONIC DRIVES THROUGH FINITE ELEMENT METHOD</i> .....	27
3.1 Présentation du modèle.....	27
3.1.1 Considérations importantes pour la modélisation.....	28
3.1.2 Discussion à propos des résultats obtenus .....	29
3.1.3 Informations complémentaires.....	30
CONCLUSION.....	33
ANNEXE I ON THE COMPUTING OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A HARMONIC DRIVE USING FEA.....	35

ANNEXE II UNDERSTANDING AND MODELING THE TORSIONAL STIFFNESS OF  
HARMONIC DRIVES THROUGH FINITE ELEMENT MODELING .....47

ANNEXE III PROGRAMME ANSYS UTILISÉ POUR CRÉER LA GÉOMÉTRIE ET  
DÉFORMER ELLIPTIQUEMENT LE WG ET LE FS.....65

ANNEXE IV PROGRAMME ANSYS UTILISÉ POUR APPLIQUER LE COUPLE SUR  
LE FS .....79

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	<i>Composantes du démultiplicateur harmonique.</i> .....4
Figure 1.2	<i>Fonctionnement typique d'un DH.</i> .....5
Figure 1.3	<i>Assemblage du DH.</i> .....6
Figure 1.4	<i>Fonctionnement des DH.</i> .....6
Figure 1.5	<i>Courbes de fatigue des composantes du DH.</i> .....7
Figure 1.6	<i>Erreur cinématique d'un DH.</i> .....9
Figure 1.7	<i>Relation typique de rigidité en torsion d'un DH.</i> .....10
Figure 1.8	<i>Interpolation linéaire par morceaux de la rigidité en torsion d'un DH.</i> ...11
Figure 1.9	<i>Hystérésis d'un DH pour différentes valeurs de couple.</i> .....14
Figure 1.10	<i>FS hybride.</i> .....17
Figure 1.11	<i>Discretisation du FS.</i> .....20
Figure 2.1	<i>Modèle E.F. où le FS est rigide et le CS est flexible.</i> .....24
Figure 2.2	<i>Statut des éléments contact.</i> .....25
Figure 2.3	<i>Effet du coefficient de friction sur la rigidité en torsion d'un DH.</i> .....26
Figure 3.1	<i>Contraintes équivalentes du FS suite à sa déformation elliptique (MPa).</i> 30
Figure 3.2	<i>Zone la plus critique du FS suite à sa déformation elliptique (contrainte équivalente, MPa).</i> .....31



## **LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE**

$\theta_{er}$	Erreur cinématique, degré
$\theta_2$	Orientation de l'élément de sortie, degré
$\theta_1$	Orientation de l'élément d'entrée, degré
R	Rapport de réduction
$n_{FS}$	Nombre de dents du Flexible Spline
$n_{CS}$	Nombre de dents du Circular Spline
MPa	Contrainte, mégapascal

## **LISTE DES ABRÉVIATIONS**

DH	Démultiplicateur harmonique
FS	Flexible Spline
WG	Wave generator
CS	Circular Spline
M.E.F.	Modèle des éléments finis ou modélisation par éléments finis



## INTRODUCTION

Dans plusieurs applications, l'emploi de systèmes de transmission est nécessaire afin d'acheminer la puissance fournie par une source vers une application donnée. Le choix d'un système de transmission et de ses caractéristiques doit se faire en tenant compte des spécificités de la source ainsi que de celles requises par l'application à laquelle elle est reliée. Les systèmes de transmission sont typiquement utilisés dans le but de fournir un avantage mécanique ou pour simplement permettre l'emploi de la source. Considérant les sources de puissance présentement utilisées, tels les moteurs à combustion ou électriques, la réduction de la vitesse de rotation et l'augmentation du couple de ces sources sont souvent essentielles pour leur emploi.

Dans ce travail, un système de transmission couramment utilisé en robotique appelé démultiplicateur harmonique, est étudié. La recherche est orientée sur la modélisation du comportement de ce système de transmission soumis à des efforts de torsion en utilisant la méthode des éléments finis. Cette caractéristique étudiée est très importante pour tous les systèmes de transmission et affecte grandement leur performance. En raison des coûts importants associés au développement de produits complexes, l'emploi de méthodes numériques pour prédire le comportement d'un système est très intéressant.

Le chapitre 1 introduit le lecteur au démultiplicateur harmonique et expose les recherches précédemment faites sur ce sujet.

Le corps du travail est constitué des articles présentés à l'annexe I et à l'annexe II de ce document. L'évaluation de la rigidité en torsion d'un démultiplicateur harmonique en utilisant la méthode des éléments finis est l'objectif de ces deux articles. Le premier article a été présenté lors de la conférence internationale ANSYS 2006 qui s'est tenue à Pittsburgh (Pennsylvanie) du 2 au 4 mai 2006. Le deuxième article a été soumis en septembre 2007 à la revue « Mechanism and Machine Theory ». Cet article est plus élaboré que le premier et

permet aussi de déterminer l'incidence des composantes du démultiplicateur harmonique sur sa rigidité en torsion ainsi que de réaliser des analyses de contraintes et de fatigue.

Les chapitres 2 et 3 contiennent respectivement des informations complémentaires à propos des articles annexés et mentionnent les considérations et limitations des modélisations réalisées.

Les annexes III et IV contiennent les fichiers de commandes ANSYS utilisés pour l'article de l'annexe II.

## **CHAPITRE 1**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

#### **1.1 Historique et principes de fonctionnement des démultiplicateurs harmoniques**

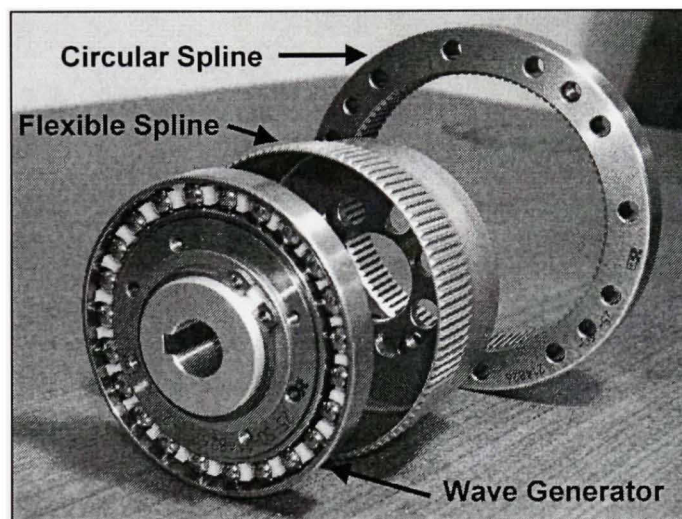
##### **1.1.1 Historique du démultiplicateur harmonique**

Le démultiplicateur harmonique (DH) a été inventé par Clarence Walton Musser, un ingénieur américain prolifique qui aurait à son actif plus de deux cent cinquante inventions (Unknown, 2007). Son invention a été brevetée dans les années 1950 (# de brevet 2,906,143) et a d'abord été utilisée dans l'industrie aérospatiale. Depuis, l'utilisation des DH s'est répandue dans plusieurs domaines. Les DH sont disponibles sous forme de composantes pouvant être intégrés dans des systèmes ou bien assemblés dans des servo-actionneurs contenant des senseurs pour l'asservissement du dispositif.

##### **1.1.2 Principes de fonctionnement des DH**

Les DH aussi connus sous les dénominations 'Harmonic Drive' ou 'Strain Wave Gearing' ont un principe de fonctionnement radicalement différent de ceux des autres mécanismes de réduction dans la mesure où celui-ci est basé sur la flexibilité d'une des composantes du DH. Le plus important manufacturier de ce type de mécanisme de réduction mentionne que ce principe est basé sur l'elastico-dynamique des métaux (elastodynamics of metals) (H.D. Systems Inc.). L'utilisation des DH est répandue dans le domaine de la robotique, pour certains appareils médicaux, dans les machines outils et pour d'autres appareillages nécessitant des systèmes de réduction offrant des ratios élevés de réduction par unité de poids et de volume. Les rapports de réduction des DH présentement offerts sur le marché varient généralement de 50:1 jusqu'à 300:1 (H.D. Systems Inc.). L'utilisation de ce système de réduction est par contre limité par son coût d'acquisition élevé comparativement d'autres systèmes de réduction. Sa durée de vie utile qui est souvent inférieure à 10000 heures

explique aussi pourquoi les DH sont souvent employés dans des applications où ils ne fonctionnent que de façon intermittente, tel des systèmes de positionnement. Afin de bien comprendre le principe de fonctionnement des DH, il importe de présenter chacune de ses composantes. Les DH présentement fabriqués sont constitués de trois composantes : le circular spline (CS), le flexible spline ou flexspline (FS) et le wave generator (WG) (Figure 1.1).



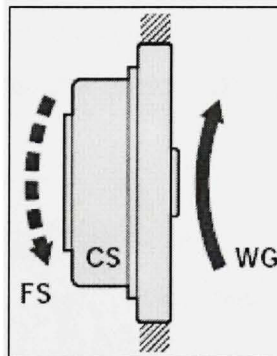
**Figure 1.1** *Composantes du démultiplicateur harmonique.*

L'utilisation des appellations anglophones pour les composantes du DH harmonique est utilisée pour ce document. Khial (Khial, 2001) appelle ces composantes : crénelage circulaire, crénelage flexible et générateur d'onde suivant l'énumération faite précédemment lorsqu'il présente ses études portant sur le comportement d'un RH. Puisque ces désignations n'ont pas été retrouvées dans d'autres recherches et qu'elles ne sont pas reconnues par l'Office québécois de la langue française, elles n'ont pas été adoptées pour le présent travail. Dans le but de faciliter la lecture, des abréviations sont utilisées.

Le WG est la seule composante des DH contenant des éléments mobiles. Le WG est très semblable à un roulement à billes. Ses différences notables sont la géométrie elliptique de sa partie centrale ainsi que sa couronne externe très mince et, par conséquent, assez flexible. Le



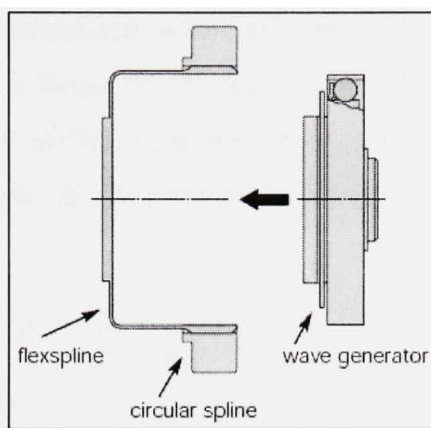
FS est une structure cylindrique fermée à l'une de ses extrémités et présentant des dents sur la surface externe de sa partie ouverte. Sa partie fermée est aussi appelée diaphragme. À l'exception de sa section d'accouplement localisée sur le diaphragme, le FS est très mince. Pour le modèle étudié, l'épaisseur de ces parois correspond à environ un centième du diamètre du FS. Le CS est un anneau rigide avec des dents taillées sur la surface de son diamètre interne. Généralement, le FS contient deux dents de moins que le CS. Le fonctionnement des DH est réversible et son intégration dans des systèmes peut se faire par six modes de transmission où la vitesse d'entrée peut être réduite ou augmentée et sa direction conservée ou inversée. Les DH sont le plus souvent utilisés en tant que réducteurs où le WG agit comme élément d'entrée et le FS comme élément de sortie et où le CS est maintenu fixé. Pour cette configuration, le sens de rotation du FS est inversé par rapport à celui de l'entrée (WG) (Figure 1.2).



**Figure 1.2** *Fonctionnement typique d'un DH.*

*(Tiré de H.D. Systems Inc.)*

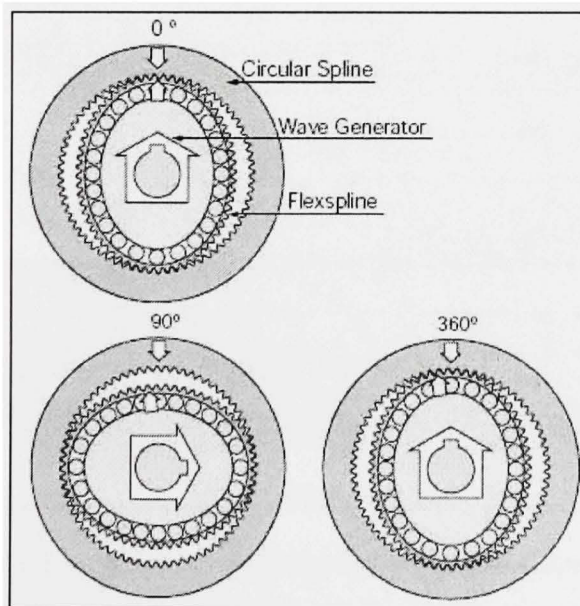
Lorsqu'assemblé, le WG déforme le FS de façon elliptique et les dents à la surface externe du FS situées vis-à-vis l'axe majeur du WG pénètrent dans celles du CS (Figure 1.3). Le DH est assemblé en fixant le FS et le CS à leurs structures respectives. Le WG est ensuite inséré à l'intérieur du FS.



**Figure 1.3 Assemblage du DH.**

*(Tiré de H.D. Systems Inc.)*

Le nombre de dents du FS en contact avec celles du CS varie en fonction des modèles mais est d'environ 30%. Cette proportion augmente aussi en fonction du couple appliqué. Lorsque le WG est entraîné dans une direction donnée, celui-ci déforme à son tour le FS et les zones d'engagement entre ses dents et celles du CS sont déplacées (Figure 1.4).



**Figure 1.4 Fonctionnement des DH.**

*(Tiré de H.D. Systems Inc.)*

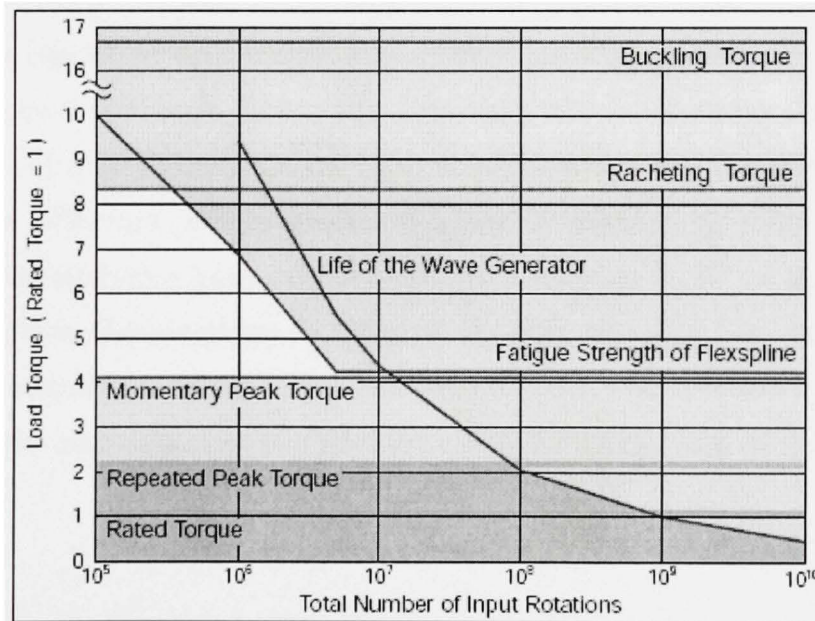


Le rapport de réduction du mécanisme est donné par l'équation 1.1 et est fonction de la différence entre le nombre de dents du FS ( $n_{FS}$ ) et du CS ( $n_{CS}$ ). Puisque le CS possède toujours deux dents de moins que le FS, la relation peut être simplifiée. La négation placée devant l'équation indique que le sens de rotation est inversé pour cet arrangement.

$$R = -\frac{n_{FS}}{n_{CS} - n_{FS}} = -\frac{n_{FS}}{2} \quad (1.1)$$

La déformation du FS et de l'anneau de retenue des billes du WG est possible parce que ces structures sont très minces.

Dépendamment des conditions d'utilisation, la durée de vie du DH sera limitée par les phénomènes de fatigue affectant le FS ou le WG (Figure 1.5).



**Figure 1.5** *Courbes de fatigue des composantes du DH.*  
(Tiré de H.D. Systems Inc.)

## 1.2 Présentation des travaux sur les DH

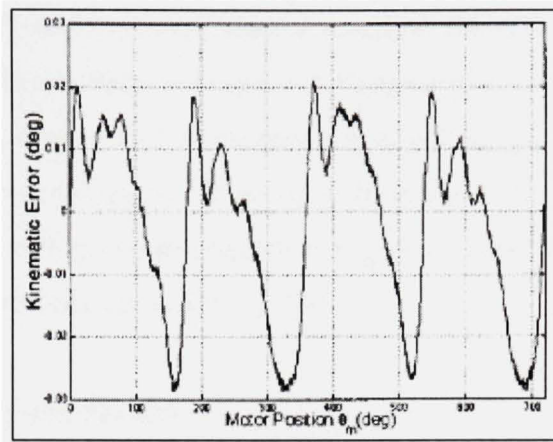
Bien que les DH soient utilisés depuis plus de 40 ans, la plupart des recherches sur ces systèmes de réduction datent d'au plus d'une vingtaine d'années où l'accessibilité à des ordinateurs facilita l'utilisation de systèmes d'acquisition ainsi que le calcul numérique. La littérature sur les DH peut être divisée en deux catégories. La première traite des phénomènes rencontrés lors de l'utilisation des DH tandis que la seconde s'intéresse spécifiquement au développement des DH dans le but d'améliorer ses performances ou pour fins d'analyses. La revue de la littérature est présentée suivant cette catégorisation.

### 1.2.1 Recherches orientées sur les enjeux à considérer lors du fonctionnement des DH

#### 1.2.1.1 Erreur cinématique des DH

Le travail de Tuttle (Tuttle, 1992) basé sur des expérimentations présente l'erreur cinématique, la rigidité en torsion ainsi que les pertes par friction attribuables à l'utilisation des DH. Il a ensuite développé des modèles théoriques afin de modéliser ces phénomènes à partir des données qu'il a recueillies par expérimentations. L'erreur cinématique est définie comme étant la différence entre la position angulaire de l'élément de sortie du DH et celle souhaitée. Cette différence peut être évaluée par l'équation (1.2) où  $\theta_2$ ,  $\theta_1$  et  $R$  sont respectivement la position angulaire de l'élément de sortie, la position angulaire de l'élément d'entrée et le rapport de réduction préalablement calculé avec l'équation (1.1). L'erreur cinématique doit nécessairement être minimisée pour les applications où le positionnement est important.

$$\theta_{er} = \theta_2 - \frac{\theta_1}{R} \quad (1.2)$$



**Figure 1.6** *Erreur cinématique d'un DH.*  
(Tiré de Ghorbel, 2001)

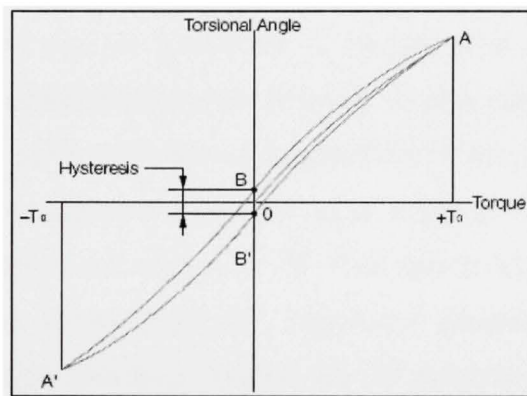
L'amplitude de cette erreur est variable en fonction de la rotation du WG (Ghorbel, 2001; Hsia, 1988; Tuttle, 1992). L'erreur primaire est définie comme celle étant maximale et se produit à deux reprises pour chaque rotation complète du WG (Figure 1.6) (Ghorbel, 2001; Hsia, 1988; Legnani, 1992; Tuttle, 1992).

Dans ses analyses, Ghorbel (Ghorbel, 2001) stipule que l'erreur cinématique peut être divisée en deux composantes : l'erreur cinématique pure ainsi que l'erreur cinématique engendrée par la flexibilité du DH. L'erreur cinématique pure est déterminée en faisant fonctionner le DH à faible vitesse (10 révolutions par minute à l'entrée) ce qui a pour effet de ne pas exciter la structure flexible. Selon cet auteur, la source de l'erreur cinématique serait attribuable à des erreurs d'assemblage du mécanisme. Un faible désalignement du CS ou une déflexion du système de maintien du FS aurait pour effet de faire varier la profondeur de pénétration du FS dans le CS de part et d'autre de l'axe majeur ce qui ferait varier la distribution de la charge sur le système d'entraînement en fonction de l'angle de rotation, causant ainsi l'erreur cinématique. Il démontre aussi que l'importance relative des composantes engendrant l'erreur cinématique est variable en fonction de la vitesse de rotation du DH et que l'erreur cinématique engendrée par la flexibilité du DH est plus importante que l'erreur cinématique pure à mesure que la vitesse d'entrée augmente. Il appert aussi que l'erreur cinématique décroît en fonction du couple appliqué sur le DH. Pour des faibles valeurs de couple, la pré

charge du WG, définie comme la profondeur d'insertion du WG dans le FS, fait diminuer l'erreur cinématique. Cela peut être expliqué par l'augmentation des surfaces de contact où s'effectue le transfert de charge. Cet arrangement peut par contre influencer la durée de vie du DH et n'est donc pas recommandé. D'autres recherches ont aussi été menées afin de déterminer analytiquement la géométrie optimale du WG en fonction du rapport de réduction souhaité afin de minimiser cette erreur (Hsia, 1988).

#### 1.2.1.2 Rigidité en torsion des DH

La rigidité en torsion des DH peut être mesurée expérimentalement en maintenant le CS fixe et en mesurant la rotation du FS soumis à différentes valeurs de couple.

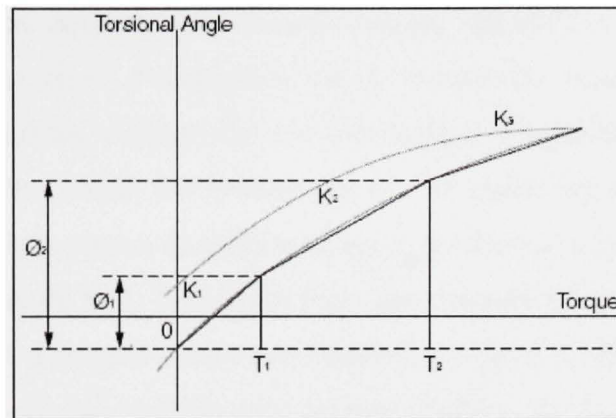


**Figure 1.7** *Relation typique de rigidité en torsion d'un DH.*

*(Tiré de H.D. Systems Inc.)*

Cette caractéristique du DH doit être évaluée pour des valeurs de couple couvrant la plage d'utilisation du DH puisque la relation n'est pas linéaire (Dhaouadi, 2003; Ghorbel, 2001; Hidaka, 1990; Legnani, 1992; Seyfferth, 1995; Taghirad, 1996; Tuttle, 1992). La rigidité en torsion du DH augmente en fonction du couple appliqué (Figure 1.7 et Figure 1.8). Dépendamment de la précision requise de la régression, des fonctions linéaires, linéaires par morceaux ou bien de degrés supérieurs peuvent être composées à partir des données provenant des mesures expérimentales.





**Figure 1.8** *Interpolation linéaire par morceaux de la rigidité en torsion d'un DH.*  
(Tiré de H.D. Systems Inc.)

Margulis (Margulis, 1987) démontre par des formulations analytiques que la rigidité en torsion d'un DH entraîné par un générateur à disques peut être évaluée d'une façon relativement précise. Cet auteur explique que la source la plus importante de flexibilité de ce type de DH est engendrée par la déformation du générateur à disques. Ce phénomène créerait un jeu permettant à cette composante de tourner et un angle de déphasage apparaîtrait entre l'orientation du générateur et l'axe majeur du FS. Bien que le sujet de la présente étude soit l'évaluation de rigidité en torsion d'un DH, l'approche adoptée par Margulis (Margulis, 1987) n'a pas été développée davantage puisque les DH présentement sur le marché ne sont pas entraînés par un générateur à disques.

### 1.2.1.3 Pertes par friction des DH

Les pertes par friction statique peuvent être évaluées avec le même appareillage que celui utilisé pour mesurer la rigidité en torsion des DH. Le graphique d'hystérésis (Figure 1.7) permet de quantifier ces pertes. Ce graphique démontre qu'une certaine valeur de couple doit être appliquée sur l'élément de sortie avant que celui-ci tourne. Aussi, lorsque le couple est relâché, les forces de frottement du système empêchent l'élément de sortie de reprendre sa position initiale.

Les pertes de friction associées au fonctionnement dynamique du DH peuvent être enregistrées par un système d'acquisition où le couple du moteur d'entraînement est enregistré pour différentes vitesses de rotation lorsque l'équilibre est atteint. Par ses expérimentations, Tuttle (Tuttle, 1992) démontra que les pertes par friction dynamique sont variables en fonction de la vitesse de rotation et que le rendement du DH diminue en fonction de la vitesse de rotation du WG. Il explique aussi que ces pertes sont attribuables aux pertes d'hystérésis, à un effet d'amortissement non linéaire ainsi qu'à la résonance du système. Ce même auteur publia aussi ces résultats avec Seering (Tuttle, 1996) où il présente un modèle mathématique représentant le comportement dynamique d'un DH.

#### **1.2.1.4 Modèles dynamiques d'asservissement des DH**

Selon Legnani (Legnani, 1992), le comportement dynamique d'un robot employant un démultiplicateur harmonique peut être prédit par un modèle mathématique si celui-ci tient compte de la rigidité en torsion du DH, de son amortissement ainsi que de l'excitation quasi sinusoïdale à une fréquence correspondant au double de celle de l'entrée. Cette excitation a été précédemment présentée comme source d'erreur cinématique. Les expérimentations menées dans le cadre de cette recherche démontrent aussi que la vitesse d'entraînement du DH doit être contrôlée afin que la fréquence de l'excitation quasi sinusoïdale ne corresponde pas à l'une des fréquences naturelles du système. Par contre, la forme de l'excitation et sa phase n'influe pas grandement les résultats des simulations. Le jeu angulaire du robot est un paramètre à considérer et son influence est plus grande que celle des constantes de rigidité des composantes du robot. Il est à noter que les simulations ont été menées en considérant la rigidité du DH comme étant constante et que les résultats des analyses vibratoires démontrent que la non linéarité de cette rigidité n'influe que faiblement la réponse du modèle. Dans le même ordre d'idées, d'autres recherches (Hidaka, 1990) démontrèrent aussi que l'amplitude de la vibration d'un robot équipé d'un démultiplicateur harmonique augmente lorsque la vitesse d'entrée du DH correspond à une des fréquences naturelles du système. L'amplitude de la vibration est aussi influencée par la rigidité en torsion du DH ainsi que par son erreur cinématique.



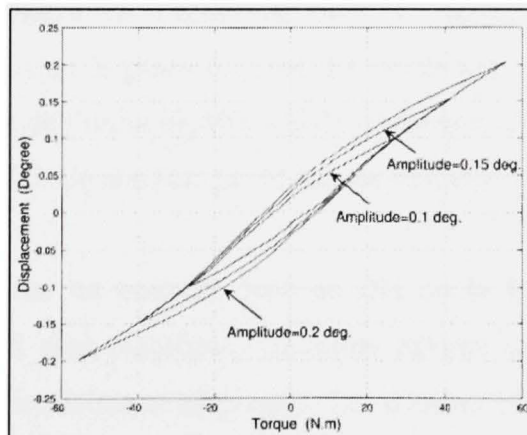
L'implantation de systèmes de contrôle en boucle fermée où le jeu différentiel du DH, sa rigidité en torsion et les forces de friction non linéaires qu'il supporte ont été considérés, permet d'obtenir une bonne corrélation entre la vitesse de rotation et la position angulaire souhaitée d'une membrure mue par un DH (Marilier, 1989). Les graphiques présentés dans cette recherche démontrent aussi une excitation constante créée par le DH correspondant probablement à l'erreur cinématique du DH. Cette excitation est plus notable lorsque le DH fonctionne à vitesse constante.

Une autre recherche (Kircanski, 1997) propose aussi une technique d'évaluation des caractéristiques des DH en considérant leur rigidité en torsion, leur hystérésis et les forces de friction qu'ils induisent afin d'augmenter la précision d'un système de contrôle basé sur le contrôle du couple. Suite à leurs expériences, les auteurs démontrèrent que le couple mesuré à la sortie du DH n'était pas égal au couple à l'entrée du DH multiplié par le ratio de réduction du DH et plus particulièrement dans les cas où des contacts contre des surfaces relativement rigides ont été simulés. Ce phénomène est engendré par la non linéarité de la rigidité en torsion du DH. Les caractéristiques du DH ont été modélisées par trois équations différentielles non linéaires décrivant respectivement les phénomènes rencontrés à des basses et hautes fréquences ainsi que les effets dynamiques du couplage des éléments du DH. Les paramètres de ces équations ont été déterminés expérimentalement. Hashimoto et Kiyosawa (Hashimoto, 1998) utilisent quant à eux des jauges de déformations collées sur le diaphragme du FS pour mesurer le couple à la sortie du DH. Cette méthode simple et les lois de comportement qu'ils ont développées permettent de compenser les effets non linéaires de pertes par friction dans un DH. Un travail similaire avait été auparavant présenté par les mêmes auteurs ainsi que Paul (Hashimoto, 1993). Néanmoins, leur dernière recherche (Hashimoto, 1998) démontre une diminution sensible des vibrations induites par la flexibilité du DH lorsque le DH est commandé. Cette technique a ensuite été améliorée (Godler, 2001) en utilisant un nombre impair de jauges de déformations (trois ou cinq jauges) comparativement à quatre précédemment. Cet arrangement est avantageux puisqu'il n'est maintenant plus nécessaire d'ajuster le signal de correction à cause des déformations induites

par la déformation cyclique du FS. Cette méthode de correction du couple est aussi plus facile à réaliser et moins coûteuse puisque le positionnement des jauges de déformations ne nécessite plus autant de précision qu'auparavant. Des tests ont aussi démontré la fiabilité et la répétitivité de la méthode de mesure proposée.

Khial (Khial, 2001) a développé des lois de commande permettant d'estimer et de compenser les effets non linéaires dans les DH dans le but de contrôler le positionnement ainsi les trajectoires d'un robot équipé d'un DH. Il mentionne toutefois que le contrôle du couple qu'il présente doit être développé davantage parce qu'il ne tient pas compte du comportement non linéaire en torsion du DH.

Finalement, en utilisant des bancs de test similaires, Taghirad et Bélanger (Taghirad, 1996), Dhaouadi, Ghorbel et Gandhi (Dhaouadi, 2003) ainsi que Seyfferth, Maghzal et Angeles (Seyfferth, 1995) développèrent d'autres modèles mathématiques utiles pour l'asservissement de systèmes où des DH sont employés. Les deux dernières recherches sont particulièrement intéressantes dans la mesure où elles présentent l'hystérésis du DH comme n'étant pas constante mais plutôt fonction des efforts précédemment transmis par le DH (Figure 1.9).



**Figure 1.9** *Hystérésis d'un DH pour différentes valeurs de couple.*  
(Tiré de Dhaouadi, 2003)

Ainsi, lorsque des couples importants sont transmis au moyen d'un DH, les forces de friction internes du DH et l'énergie dissipée par celui-ci augmentent. Taghirad et Bélanger (Taghirad, 2001) améliorèrent ensuite leur modèle en ajoutant un système contrôle en boucle fermée du couple de sortie du DH.

## **1.2.2 Recherches orientées vers le développement des DH**

### **1.2.2.1 Profil de la dentition du FS et du CS et géométrie du WG**

Les premiers DH étaient dotés d'un générateur à cames pour déformer le FS et la dentition du FS et du CS était de type développante de cercle (involute). Le générateur à cames fut ensuite remplacé par le WG au profil elliptique. Des travaux (Kiyosawa, 1989) portant sur le profil de la dentition des DH réalisés par le plus important fabricant de DH ont permis d'améliorer de façon importante ses performances. Le nouveau profil développé n'est plus à développante de cercle (involute) et est maintenant composé d'arcs circulaires convexes et concaves. Avec ce profil, le rayon au fond des dents du FS est considérablement agrandi causant une augmentation des surfaces de contact et une diminution de la flexibilité de ses dents. Pour des DH de même dimension, ceux ayant ce nouveau profil de dentition ont une rigidité en torsion supérieure de l'ordre de 50% à 100% et une vie utile doublée comparativement à ceux ayant le profil original. Le rendement du système est comparable pour les deux profils et est de l'ordre de 60% à 90% dépendamment du couple appliqué et de la vitesse de rotation du WG. Ce nouveau profil est communément appelé profil en 'S'.

Maiti (Maiti, 2004) propose un nouveau type de DH où la forme du WG ainsi que la dentition du FS et du CS sont modifiées. La forme externe du WG est maintenant une combinaison de courbes circulaires et elliptiques. Les courbes circulaires sont situées vis-à-vis l'axe majeur du WG tandis que celles elliptiques sont vis-à-vis l'axe mineur. L'utilisation de courbes circulaires permet l'utilisation de profil involute pour la dentition du FS et du CS. L'auteur mentionne que l'utilisation du profil de WG qu'il a développé diminuerait le niveau de contraintes à la base des dents du FS en contact avec ceux du CS puisque le FS ne serait pas déformé au niveau de la base de ces dents. Cette affirmation ainsi que la capacité de ce



type de DH reste à vérifier sous forme de tests ou par modélisation par éléments finis. Néanmoins, un prototype en acrylique a démontré la fonctionnalité de ce principe.

Kondo et Takada (Kondo, 1990) avaient préalablement réalisé des études sur l'utilisation de profils en développante de cercle (involute) pour les DH. Ils proposèrent un profil de dentition plus mince au bout de la dent dans le but d'éviter les phénomènes d'interférence. Cette étude présente la méthodologie qu'ils ont suivie pour déterminer ce profil mais n'apporte pas de conclusion quant aux bénéfices obtenus par l'utilisation d'un tel profil.

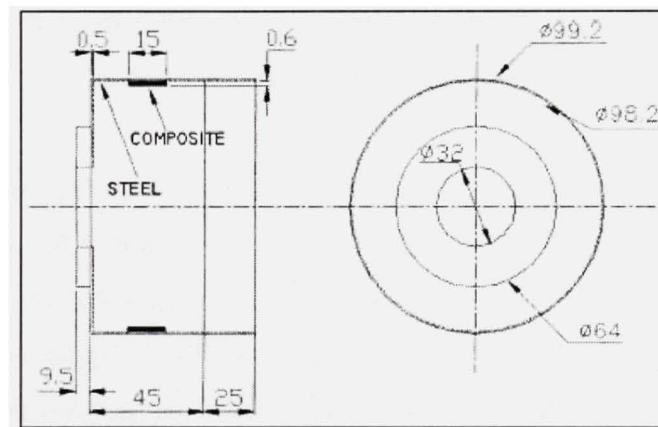
#### **1.2.2.2 Utilisation des matériaux composites**

Considérant les déformations importantes que subit le FS lors du fonctionnement d'un DH, des chercheurs se sont intéressés à la fabrication de FS en matériaux composites. Cette composante est usinée dans des alliages d'aciers pour les DH présentement offerts sur le marché. L'utilisation de matériaux composites est intéressante puisqu'elle permet d'optimiser les propriétés des composantes faites avec ces matériaux anisotropes. Dans le cas du FS d'un DH, il est souhaitable que cette composante soit rigide en torsion et flexible radialement pour qu'elle puisse être transformée facilement de façon elliptique sans trop être contrainte par le WG. Considérant cela, Oh, Jeong et Lee (Oh, 1994) ont développé un DH où la partie cylindrique du FS est constituée d'un matériau composite : de la fibre de carbone et une résine époxyde. Cette structure a été collée à une dentition en acier ainsi qu'à un arbre de sortie. Comparativement à un FS avec des dimensions similaires en acier monobloc, les analyses sur le FS en matériau composite démontrent une augmentation significative de la première fréquence naturelle (220%) et un d'amortissement plus élevé. Les auteurs mentionnent aussi que la capacité de transmission de ce FS est assez élevée (Couple > 460 N-m) pour être considérée utilisable pour des applications robotiques.

Afin de réduire les opérations de fabrication requises pour obtenir le FS précédemment présenté (Oh, 1994), un FS fait complètement d'un matériau composite (carbone-époxy) à l'exception de son diaphragme a été développé (Dong Hyun Kim, 1995). Les résultats pour

ce FS démontrent aussi une augmentation de sa capacité d'amortissement ainsi que de ses premières fréquences naturelles comparativement à un FS en acier. La masse du FS en matériaux composites est réduite de 40% et sa flexibilité radiale est augmentée de 40% comparativement au FS en acier. Malgré ces résultats intéressants, les auteurs ne mentionnent pas la charge que peut transmettre ce FS ainsi que la durabilité des parties dentées en matériaux composites.

D'autres recherches présentent des FS appelés 'hybrides' (Han Su Jeon, 1999; Se Hoon Oh, 1997). Ces FS ont une géométrie comparable à ceux communément utilisés à la différence près qu'une couche d'un matériau composite est appliquée à l'intérieur de la partie cylindrique du FS (Figure 1.10).



**Figure 1.10 FS hybride.**

*(Tiré de H.D. Jeon, 1999.)*

Dans ces recherches, deux combinaisons de matériaux composites ont été utilisés : fibre de verre et résine époxyde et fibre de carbone et résine époxyde. Des essais ont été réalisés pour des épaisseurs de cette couche de matériau de 0.1 mm, 0.5 mm et 1.0 mm pour plusieurs orientations des plans principaux des fibres. Ces études démontrent que l'épaisseur du matériau composite appliqué, sa composition ainsi que l'orientation de ses fibres par rapport à l'axe de rotation du FS sont des facteurs qui influent les propriétés dynamiques du FS, sa rigidité en torsion ainsi que l'intensité de la contrainte maximale auquel il est soumis.

Considérant les résultats de ces analyses, il n'est pas aisé de recommander un arrangement au lieu d'un autre sans considérer quelles propriétés du FS sont recherchées dans l'éventualité où l'utilisation d'un tel procédé est souhaitée.

### **1.2.2.3 Analyses expérimentales et modélisations par éléments finis**

La méthode des éléments finis a été choisie par Kikuchi *et al.* (Kikuchi, 2003) pour analyser le niveau de contraintes subies par le FS dans le but d'évaluer sa durée de vie utile. Afin de développer ce modèle, ils ont d'abord analysé ce DH sur banc d'essai pour comprendre la distribution de charges entre les billes du WG et le FS. Le CS a été considéré comme étant rigide et l'interaction entre celui-ci et le FS est réalisé par des éléments de type contact en utilisant une solution itérative. Les auteurs mentionnent que leur modèle permet de déterminer le niveau de contrainte du FS d'une façon quantitative puisque ces résultats concordent avec ceux de mesures expérimentales précédemment réalisées.

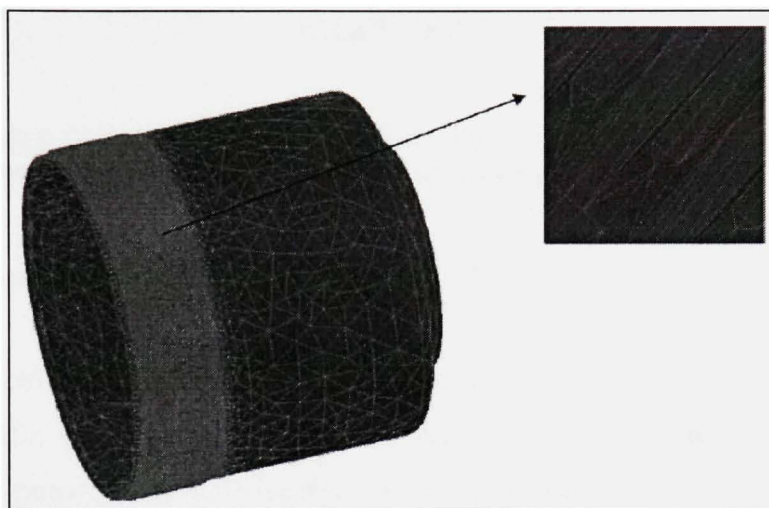
La revue de littérature ne saurait être complète sans mentionner les nombreuses recherches (Huang, 1994; Ishida, 1995; Sugimoto, 1993; Yanabe, 1989; Zhang, 1996) réalisées au Japon où un important fabricant de DH est implanté. Bien que ces études aient été publiées en japonais, elles ont été analysées et leurs résultats ont été considérés puisque leurs résumés ainsi que les figures et graphiques qu'ils contiennent sont annotés en anglais. Dans son étude, Huang (Huang, 1994) a établi des relations entre les contraintes d'un FS et les charges appliquées sur celui-ci basé sur des essais où des jauges de déformations ont été collées sur le FS. Il démontre que la zone de contact entre le FS et le CS augmente en fonction du couple transmis par le DH. Cet accroissement se fait principalement dans la direction longitudinale des dents du DH. Zhang (Zhang, 1996) explique les effets des erreurs d'assemblage du DH sur le FS qui a été instrumenté. En résumé, la zone la plus sollicitée du FS est toujours localisée à la base des dents du FS orientées vis-à-vis l'axe majeur du WG. Cette zone est située à mi longueur des dents selon l'axe longitudinal du FS. Les erreurs d'assemblages considérées étaient la profondeur d'insertion du WG ainsi que l'excentricité et l'inclinaison du FS par rapport au CS. L'étude de Ishida (Ishida, 1995) portant sur l'influence des



composantes des contraintes du FS est plus difficile à interpréter et n'est donc pas présentée davantage.

Les études de Yanabe (Yanabe, 1989) et Sugimoto (Sugimoto, 1993) ont, comme ce travail, l'objectif de déterminer la rigidité en torsion de DH en utilisant la méthode des éléments finis (M.E.F.). Les modèles qu'ils ont développés permettent d'évaluer cette caractéristique des DH en utilisant seulement quelques centaines d'éléments. Cependant, ces modèles ne peuvent être utilisés pour déterminer les contraintes affectant le FS puisque les dents ne sont modélisées que par des surépaisseurs d'éléments. La détermination des interactions des billes du WG a aussi nécessité des expérimentations. Ces données ont ensuite été utilisées pour restreindre le M.E.F.

Des chercheurs turcs (Kayabasi, 2005) ont récemment publié un article portant sur l'optimisation de paramètres géométriques du FS en utilisant le M.E.F. Cette étude n'a toutefois pas été considérée puisque l'intensité des contraintes affectant le FS mentionnée dans l'article était bien en deçà de ce que l'on retrouve dans la littérature (Ishida, 1995; Kikuchi, 2003; Zhang, 1996). De plus, la qualité du M.E.F. est assez discutable car le maillage non structuré utilisé est assez disproportionné (Figure 1.11).



**Figure 1.11** *Discretisation du FS.*

*(Tiré de Kayabasi, 2005)*

Les études menées pour déterminer la rigidité en torsion d'un DH et présentées au chapitres 2 et 3 et dans les annexes I et II ont été réalisées en se basant sur les travaux précédemment mentionnés, plus précisément, ceux de Kikuchi *et al.*, de Sugimoto *et al.* et de Yanabe *et al.* (Kikuchi, 2003; Sugimoto, 1993; Yanabe, 1989).

## CHAPITRE 2

### COMPLÉMENT D'INFORMATIONS DE L'ARTICLE *ON THE COMPUTING OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A HARMONIC DRIVE USING FEA*

#### 2.1 Présentation du M.E.F.

Ce chapitre se veut un complément d'informations pour l'article présenté à l'ANNEXE I de ce document. Afin de comprendre son développement, les hypothèses utilisées, certaines considérations à propos de la modélisation, les résultats observés ainsi que des informations complémentaires sont brièvement exposés. Le lecteur est prié de se référer à l'ANNEXE I où se retrouve l'article dont il est question dans ce chapitre pour une explication plus détaillée de la méthodologie utilisée.

##### 2.1.1 Hypothèses simplificatrices considérées

Pour faciliter la modélisation, les hypothèses suivantes furent émises :

- Le WG est infiniment rigide et a une forme elliptique.
- Le contact entre les dents du FS et celles du CS se produit sur toute la profondeur axiale de celles-ci (les déformations par torsion des dents du FS et du CS ne sont pas considérées).
- La rigidité en torsion de la partie cylindrique du FS est comparable à celle d'un arbre creux.
- La flexibilité induite par le contact entre les dents du FS et celles du CS, deux surfaces flexibles, peut être évaluée par des M.E.F. distincts où chacune des composantes est modélisée comme étant flexible et mise en contact avec l'autre composante modélisée comme étant rigide.
- Le FS est libre de glisser sur le WG.
- Les dents du FS sont seulement déformées en flexion.

### **2.1.2 Considérations importantes pour la modélisation de l'engrènement du FS et du CS**

La partie la plus complexe de cette modélisation est la simulation de l'engagement des dents du FS dans celles du CS. Pour réaliser cette étape, l'orientation du FS et du CS a été déterminée de façon à ce que les dents du FS puissent pénétrer entre celles du CS lorsque le FS est déformé de façon elliptique. Les paires d'éléments de type contact entre le FS et le CS et entre le FS et le WG sont nécessaires pour contrôler la géométrie finale obtenue suite à la déformation elliptique du WG. Les éléments dits de type contact représentent une classe d'éléments utilisés pour modéliser les interactions entre des structures qui se rencontrent. L'utilisation de ces éléments requiert nécessairement une résolution non linéaire du modèle (Cook, 2002) puisque les surfaces de contact se modifient en fonction de l'intensité de la force. Il faut mentionner que modéliser le FS initialement déformé elliptiquement aurait été une mauvaise approche puisque la contrainte induite par la déformation n'aurait pas été considérée. De plus, la véritable géométrie du FS doit nécessairement tenir compte des forces de retenue engendrées par le contact de cette structure contre le CS. Néanmoins, la modélisation du FS initialement déformé aurait quand même pu être réalisée puisque le logiciel utilisé a la capacité d'ajuster automatiquement les surfaces où la pénétration initiale est supérieure à une valeur prédéterminée (ANSYS, 2004). Cette procédure est toutefois assez difficile à réaliser puisque le logiciel doit considérer le statut de plusieurs centaines ou milliers d'éléments de type contact.

### **2.1.3 Discussion à propos des résultats obtenus**

Bien que le modèle présenté dans cette étude ait une rigidité supérieure à celle avancée par le manufacturier d'un ordre de 50%, le travail effectué démontre la possibilité qu'offre le logiciel de simuler un problème complexe où survient des contacts entre des structures

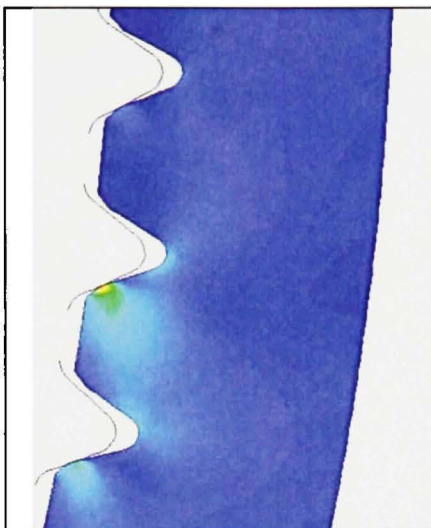
flexibles. De plus, considérant les deux premières hypothèses simplificatrices mentionnées précédemment, un comportement plus rigide en torsion était prévisible et l'obtention d'une rigidité trop faible aurait été difficilement discutable. Il faut aussi considérer que lors de ses essais expérimentaux où il testa la rigidité en torsion du DH, Tuttle (Tuttle, 1992) nota des divergences importantes entre ses mesures et celles spécifiées par le fabricant. En somme, les résultats des étapes réalisées à ce stade sont prometteurs et une modélisation plus représentative relativement aux phénomènes jusqu'ici non considérés permettra certainement de modéliser d'une façon plus réaliste la rigidité en torsion du DH.

Il est à noter que lors de la présentation orale de cet article au cours de la conférence, un modèle tridimensionnel semblable à celui exposé au chapitre suivant a été montré. Bien que les résultats n'étaient pas encore disponibles, une explication des phénomènes que l'on souhaitait simuler en utilisant un tel modèle a été donnée à l'auditoire.

#### **2.1.4 Informations complémentaires**

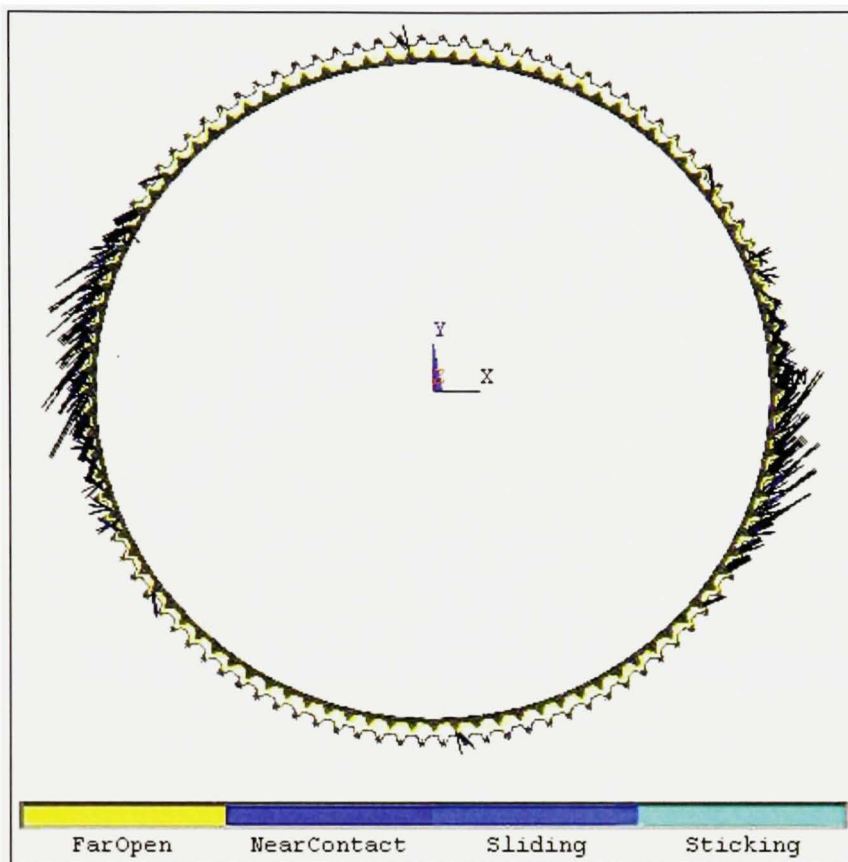
Les figures présentées dans cette section sont utilisées pour démontrer des phénomènes expliqués dans l'article. La Figure 2.1 représente la modélisation développée pour évaluer la flexibilité du CS. Cette image démontre la contrainte induite dans le CS lorsque cette structure est en contact avec le FS.





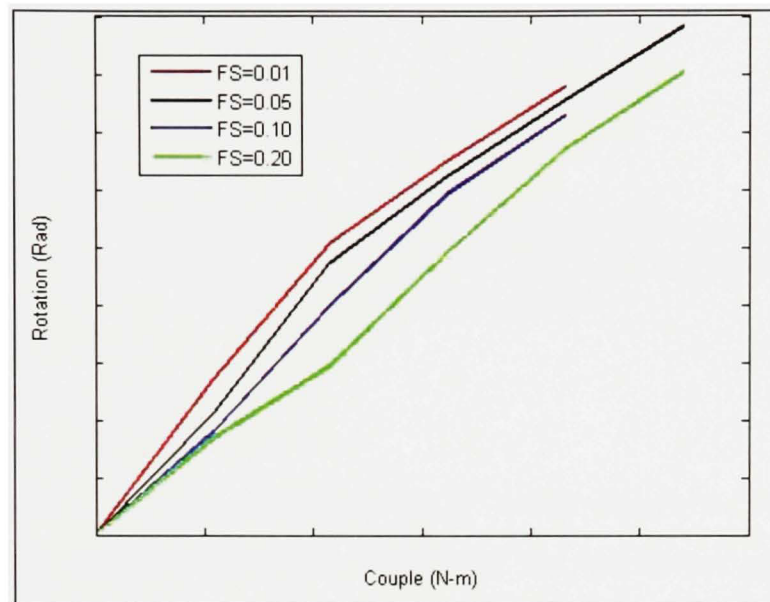
**Figure 2.1** *Modèle E.F. où le FS est rigide et le CS est flexible.*

Le statut des éléments contacts du CS et du FS est montré sur la Figure 2.2. La longueur des vecteurs est fonction de l'intensité du statut. On peut remarquer que puisque l'axe majeur du WG est horizontal, la majorité des zones de contact se situent dans les zones correspondant à cette direction. Néanmoins, la présence de vecteurs dans l'axe mineur de l'ellipse démontre la proximité du FS et du CS et la nécessité de considérer les effets d'interférence comme l'avait mentionné Kondo dans son étude (Kondo, 1990).



**Figure 2.2** *Statut des éléments contact.*

Bien que ce sujet n'ait pas été traité dans l'article, la Figure 2.3 démontre les résultats d'une simulation autre que celle contenue dans l'article où la variation du coefficient de friction entre le FS et le CS influe la rigidité en torsion du DH. Pour ce cas présent, les simulations ont été faites en utilisant des coefficients de friction variant de 0.12 à 0.16.



**Figure 2.3** *Effet du coefficient de friction sur la rigidité en torsion d'un DH.*

## CHAPITRE 3

### **COMPLÉMENT D'INFORMATIONS DE L'ARTICLE *UNDERSTANDING AND MODELING THE TORSIONAL STIFFNESS OF HARMONIC DRIVES THROUGH FINITE ELEMENT METHOD***

#### **3.1 Présentation du modèle**

Ce chapitre se veut un complément d'informations à l'article présenté à l'ANNEXE II de ce document. Afin de comprendre son développement, les hypothèses utilisées, certaines considérations à propos de la modélisation, les résultats observés ainsi que des informations complémentaires sont brièvement exposés. Le lecteur est prié de se référer à l'ANNEXE II où se retrouve l'article dont il est question dans ce chapitre pour une explication plus détaillée de la méthodologie utilisée. Les annexes III et IV contiennent des exemples de fichiers de commande ANSYS utilisés pour réaliser les simulations présentées dans l'article de l'ANNEXE II. Le fichier de commande servant à évaluer la rigidité en torsion du diaphragme n'est pas présenté puisqu'il est beaucoup plus simple que les deux autres montrés aux annexes III et IV. Le fichier de l'ANNEXE III construit la géométrie du modèle éléments finis et permet d'imposer les déplacements qui déforment le FS de façon elliptique. Cette étape correspond à la position au repos d'un DH. Le fichier de commande de l'ANNEXE IV utilise la solution obtenue précédemment et applique des forces sur le diaphragme du FS pour simuler un couple. Les courbes de rotation en fonction du couple appliqué sont obtenues en réalisant plusieurs simulations avec le fichier de commande de l'ANNEXE IV pour différentes valeurs de couple.

Pour faciliter la modélisation, les hypothèses suivantes furent émises :

- Le partie centrale du WG est infiniment rigide. Par contre la flexibilité de ses billes et de leur bague de retenue externe est considérée.
- Les billes du WG ont toutes la même rigidité.
- Le CS est considéré totalement rigide.
- Le FS est libre de glisser sur le WG.

### 3.1.1 Considérations importantes pour la modélisation

Dans le but de limiter les phénomènes non linéaires, la rigidité des billes constituant le WG a été considérée constante pour toutes ces billes. En réalité, lorsqu'une bille est comprimée contre une surface plane, sa rigidité augmente à cause de l'augmentation des surfaces déformées. Le comportement des billes du WG soumises à des forces de compression est considéré correspondant à celui de billes en contact avec une surface plane puisque les rayons des anneaux de retenue des billes sont de beaucoup supérieurs à celui des billes ( $R_{\text{anneaux}} > 10 \cdot R_{\text{billes}}$ ). Des simulations distinctes ont ensuite été réalisées en appliquant pour chacune d'elles des propriétés de rigidité différentes pour l'ensemble des billes du WG. Cette procédure a été adoptée dans le but de déterminer facilement et rapidement la plage de rigidité en torsion du DH en considérant la flexibilité induite par le WG sans toutefois utiliser des relations de comportement non linéaires. Contrairement à la technique utilisée par Kikuchi *et al.* (Kikuchi, 2003), celle développée au cours de cette étude ne requiert pas d'analyser expérimentalement quelles billes du WG sont sollicitées par les forces de compression. Il suffit de leur attribuer une propriété de rigidité et les forces auxquelles elles sont soumises peuvent être obtenues lorsque le M.E.F. est résolu.

D'autre part, afin de simplifier le modèle présenté dans cet article, le CS a été considéré totalement rigide. L'étude précédente avait démontré sa faible influence sur le calcul de la rigidité en torsion du DH. Néanmoins, puisque la rigidité en torsion calculée par le modèle



précédant était très élevée, il avait été décidé de considérer son incidence sur la réponse du système.

La modélisation de l'engrènement des dents du FS dans celles du CS a été réalisée d'une façon similaire à celle expliquée au chapitre précédent.

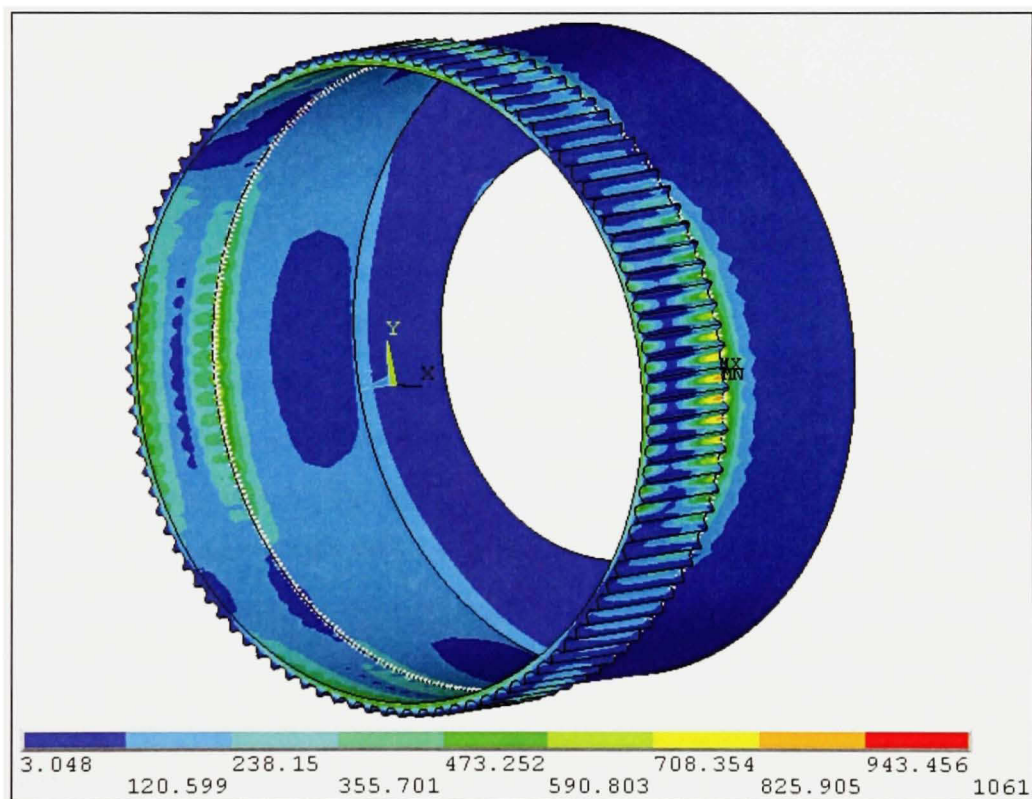
### **3.1.2 Discussion à propos des résultats obtenus**

Considérant que la M.E.F. est une méthode numérique approximative et que le phénomène étudié est relativement complexe, la méthode utilisée pour évaluer la rigidité en torsion de DH est jugée efficace puisque les résultats obtenus par celle-ci correspondent à ceux déclarés par le manufacturier. La marge d'erreur est variable et est d'au plus 20% sur la plage d'utilisation du DH. Il est à noter que la simulation d'un WG infiniment rigide permet d'obtenir une approximation acceptable de la rigidité en torsion d'un RH. Par contre, la différence entre les résultats obtenus de cette façon et ceux où la flexibilité du WG est considérée augmente de façon linéaire en fonction du couple. Par conséquent, si d'autres analyses étaient réalisées pour plusieurs autres modèles et capacités de DH, il est possible qu'une relation empirique puisse être obtenue permettant de corriger la rigidité en torsion évaluée par un M.E.F. d'un DH où le WG aurait été modélisé parfaitement rigide.

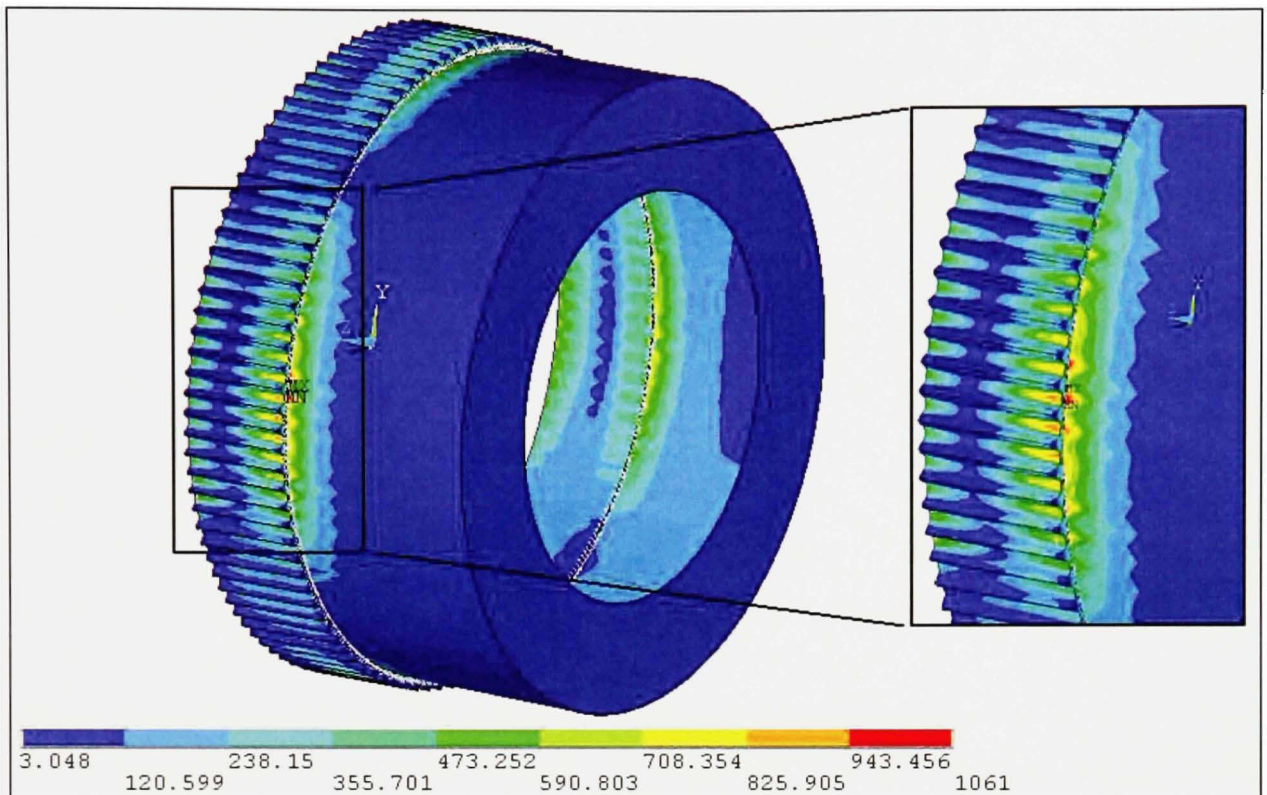
En tenant compte des résultats des simulations ainsi que des spécifications du manufacturier, la flexibilité induite par cette composante contribue pour environ 20% de la flexibilité en torsion du DH étudié. Puisque le niveau de contraintes ne variait pas beaucoup entre les configurations où la flexibilité du WG était considérée ou non, il semble qu'il soit souhaitable que cette composante soit la plus rigide possible pour maximiser la rigidité en torsion du RH. Cette idée devrait toutefois être validée par des essais expérimentaux pour s'assurer qu'elle n'engendrerait pas d'effets indésirables tels des augmentations de contraintes sur le FS.

### 3.1.3 Informations complémentaires

Le modèle présenté dans cette section est intéressant puisque plusieurs de ses caractéristiques géométriques et physiques sont paramétrés et qu'il est donc utilisable pour des fins d'optimisation. Puisque le FS est modélisé à partir des dents jusqu'au diaphragme, cette partie peut aussi être étudiée. La modélisation du WG permet en outre de prédire la vie utile de DH étant donné que cette composante ainsi que le FS sont responsables de cette limitation due aux phénomènes de fatigue (Figure 1.5) et qu'il est possible de déterminer les charges et les contraintes sur ceux-ci. Les figures 3.1 et 3.2 présentent les contraintes subies par le FS lors de sa déformation elliptique.



**Figure 3.1** *Contraintes équivalentes du FS suite à sa déformation elliptique (MPa).*



**Figure 3.2** *Zone la plus critique du FS suite à sa déformation elliptique (contrainte équivalente, MPa).*

Sur la figure 3.2, on remarque qu'il y a une concentration de contraintes à la jonction des éléments solides et des éléments coques de chaque côté du FS vis-à-vis l'axe majeur du WG. Cela est attribuable aux liaisons des degrés de liberté (MPC : Multi point constraint) entre ces types d'éléments qui sont nécessaires pour que la structure soit continue. Considérant cela, les contraintes déterminées pour les éléments de cette région ne sont peut être pas réalistes et il serait intéressant de modifier la topologie de ce modèle afin de corriger cette lacune locale.

D'autre part, le lecteur pourra s'apercevoir que la rigidité du diaphragme mentionnée dans les articles varie substantiellement. Cela peut être expliqué par le fait que pour le premier modèle (2-D), la constance de rigidité mentionnée est applicable à tout le diaphragme du FS. Pour le second modèle, cette constante réfère seulement à la partie la plus épaisse du diaphragme qui contient l'attachement du FS puisque la flexibilité de la partie mince du FS

est modélisée par des éléments de type coque. Par conséquent, il est normal que cette constante soit moins élevée pour le premier modèle que pour le deuxième.



## CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de développer une méthodologie permettant d'évaluer numériquement la rigidité en torsion d'un démultiplicateur harmonique. La difficulté de ce projet réside dans l'obtention d'une solution d'une modélisation par éléments finis où des forces importantes sont appliquées sur un système qui n'est retenu que par des forces de contact et de friction. Pour réaliser cela, deux méthodologies différentes ont été utilisées et exposées. Suite à l'analyse des résultats de ces méthodologies, les conclusions suivantes peuvent être faites :

- Le modèle des éléments finis (M.E.F.) présenté à l'ANNEXE II présente une méthodologie permettant de déterminer assez rapidement et avec une précision acceptable la rigidité en torsion d'un DH.
- L'engrènement des dents du FS et du CS est très complexe et doit nécessairement être modélisé en trois dimensions afin de considérer la taille variable des surfaces de contact induite par la torsion des dents du FS sous l'effet du couple. Cette approche permet aussi de considérer la déformation des dents du FS causée par la section cylindrique du FS.
- La flexibilité radiale du WG a un effet significatif sur la rigidité en torsion d'un DH. La déformation de cette composante vis-à-vis son axe majeur limite la pénétration des dents du FS dans celles du CS. Par conséquent, si cette composante est considérée rigide dans un M.E.F., il est à prévoir que ce modèle évaluera une rigidité en torsion plus grande que celle obtenue par tests.
- Les dimensions des composantes de DH doivent être très précises pour que ce mécanisme soit fonctionnel. Les résultats des simulations sur l'effet des dimensions du WG (voir ANNEXE II) montrent clairement qu'il n'est pas souhaitable d'interchanger les composantes de DH de mêmes modèles.



Afin de poursuivre la recherche visant à mieux comprendre et à développer des DH plus performants, les recommandations suivantes pourraient être suivies :

- Instrumenter le DH avec des jauges de déformations et valider les contraintes prédites par le M.E.F. présenté à l'ANNEXE II.
- Poursuivre le développement de ce modèle en réalisant un différent type de jonction entre les éléments solides et coques pour éviter les effets de concentrateurs de contraintes.
- Intégrer une loi de comportement correspondant à la rigidité des billes en fonction de la charge appliquée pour les éléments uniaxiaux représentant les billes.
- Modéliser les dents du FS et du CS avec des éléments de degré supérieur pour mieux représenter leurs courbures ainsi que leurs zones de contact.

Le modèle d'engrènement bidimensionnel des dents du FS et du CS a somme toute démontré qu'il est souhaitable de maximiser l'empreinte de contact entre les dents du FS et celles du CS afin que la rigidité en torsion du DH soit maximale. L'utilisation des matériaux composites dans la fabrication du FS pourrait être souhaitable, car des matériaux aux propriétés anisotropes minimiseraient la rigidité radiale pour permettre un bon engagement des dents du FS dans celles du CS et maximiseraient la rigidité en torsion du FS, et par conséquent du DH.

L'utilisation du M.E.F. présenté à l'ANNEXE II pourrait être envisagée pour étudier davantage cette avenue. Néanmoins, des essais en laboratoire devraient aussi être réalisés pour s'assurer que l'augmentation de l'amortissement structural du FS ne soit pas trop significative. Cela pourrait diminuer d'une façon importante le rendement d'un tel DH et engendrer des problèmes du point de vue de l'asservissement si l'hystérésis est trop élevé.

## **ANNEXE I**

### **ON THE COMPUTING OF THE TORSIONAL RIGIDITY OF A HARMONIC DRIVE USING FEA**

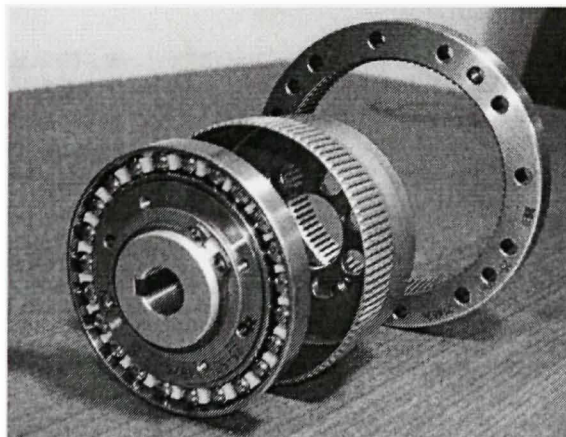
Cet article a été présenté lors de la 2006 International ANSYS Conference qui s'est tenue à Pittsburgh (Pennsylvanie) du 2 au 4 mai 2006. Les auteurs sont : François Etienne Rhéaume (ETS), Henri Champlaud (ETS) et Zhaoheng Liu (ETS). Il est accessible dans les Conference Proceedings.

### Abstract

Strain wave gearing also known as harmonic drive gearing is a mechanism commonly used in robotics. Their high reduction ratios combined with their small sizes are some of the keys that speeded their use in industrial applications. Over the last years, several research works have been carried out to determine the characteristics of strain wave gearing such as torsional stiffness, hysteresis, fatigue and efficiency. Most of these researches have been focused on testing harmonic drives at various operating conditions and by capturing their characteristics with test units using strain gage, encoder and torque meter. Today, the possibility of simulating complex problems using finite element software has brought new possibilities that allow duplicating of the behavior of highly nonlinear systems with multiple contact surfaces. The objective of this work is to develop a numerical model of a harmonic drive that replicate the torsional stiffness of an actual harmonic drive. Once validated this model will be used to study effects such as teeth engagement and teeth profile to develop a numerical model to predict the characteristics of harmonic drives under development. The ANSYS software has been used in this research to simulate the complex tooth engagement process between the flexspline and the circular spline of a harmonic drive as well as the torsional rigidity of harmonic drives. Numerical results and theoretical models in replicating the static behavior of the harmonic drive will be compared and discussed.

### Introduction

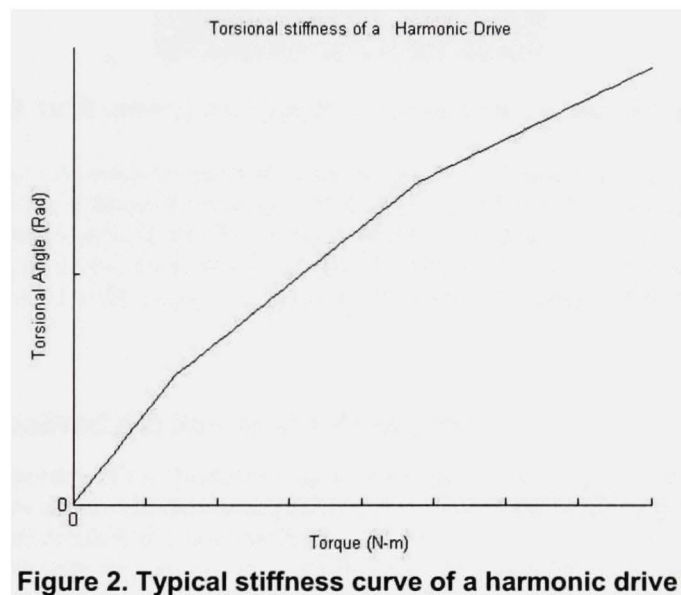
Harmonic drive gearing also known as strain wave gearing is a constant ratio mechanical drive system used for angular positioning or power transmission. Primarily used for robotics applications, harmonic drives are now found in many devices ranging from machine tools to medical equipment. The harmonic drive consists of three components: the circular spline (CS), the flexspline (FS) and the wave generator (WG) (See Figure 1).



**Figure 1. Components of a harmonic drive (Front to rear WG, FS, CS)**

The wave generator consists of an elliptical rigid part surrounded by ball bearings that are retained by a flexible metal strip. The flexspline is a thin-walled cylinder cup closed at one of its end who also has teeth on the front part of its outer diameter. Its back portion consists of a hole pattern that is used for connection. The circular spline is a thick metal ring with teeth on its inner diameter. These teeth mesh with the ones on the flexspline in

an elliptical shape resulting from the geometry of the wave generator. Usually, the power is transmitted from the wave generator and comes out of the flexspline which rotates in the opposite direction of the wave generator while the circular spline is maintained fixed. Deformation of the flexspline due to its small thickness is a significant factor of the harmonic drive torsional flexibility. In this study, we will depict the origin of the torsional rigidity of harmonic drive by taking into consideration the behaviour of its components under static loading. Literature on harmonic drives [1,4] shows that the torque versus rotation curve is nonlinear. As the torque is increased the device acts like a stiffening rotational spring. The following figure (See Figure 2) represents a typical torque versus torsional angle graph of a harmonic drive using piece wise linear approximation. Typical stiffness curves can also be represented with a cubic regression. Usually these curves are plotted with data gathered from experimentations.

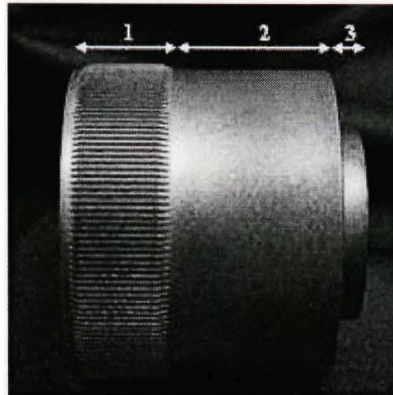


**Figure 2. Typical stiffness curve of a harmonic drive**

## Procedure

Calculating the torsional stiffness of a harmonic drive is a challenge from a modelling point of view due to the complex phenomenon involved in the process. Initial deformation of the flexspline, contacts and friction between the flexspline and the circular spline as well as deformation of the flexspline during loading should all be considered to obtain acceptable results. In this paper the harmonic drive reducer is studied by dividing it into three distinctive portions (See Figure 3 showing the 3 studied portions). The first portion (1) contains the teethed section of the flexspline and of the circular spline while the second portion (2) is the cylindrical part of the flexspline. The third portion (3) represents the back portion of the flexspline. The torsional stiffness results of all parts are combined and compared to manufacturer's data.





**Figure 3. Side view of the flexspline showing the 3 studied portions**

Careful attention is given to the teeth geometry of the flexspline and of the circular spline in order to reproduce the complex meshing process between these parts. Any divergence between the actual geometry of the teeth and the ones on the model would result in significant error. Measurements on the wave generator have been limited to the dimensions of its major and minor axis that deforms the flexspline. The wave generator is considered to be rigid compared to the flexspline. The following sections provide details about the modeling of each of these portions.

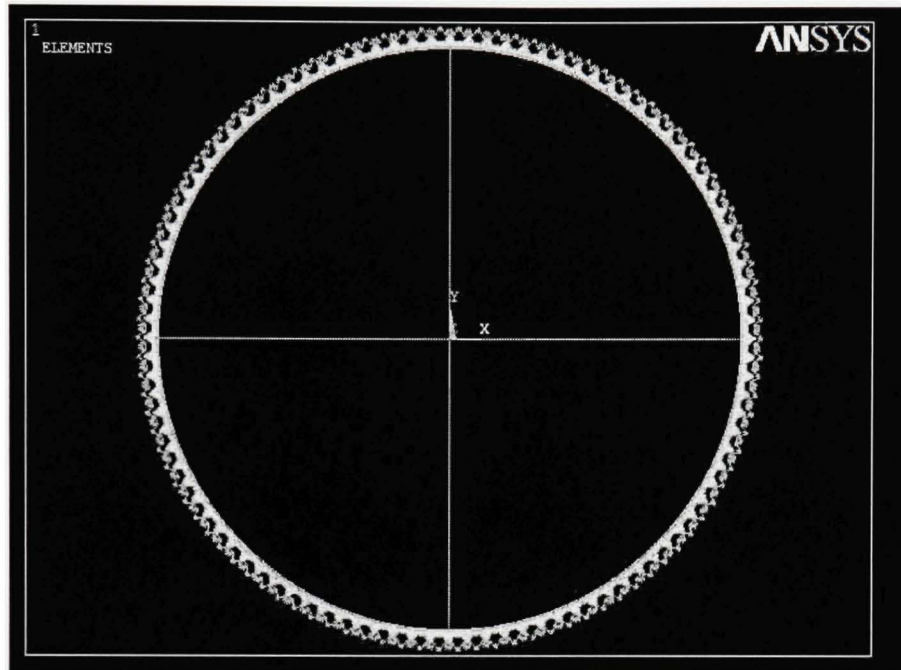
### ***Modeling of the teethed portion of the flexspline***

The FE modeling of this portion of the flexspline was the most time consuming compared to the two other portions. We had to figure out how to model the phenomenon caused by the meshing process, the actual degrees of freedom to be restrained or allowed as well as the applied torque.

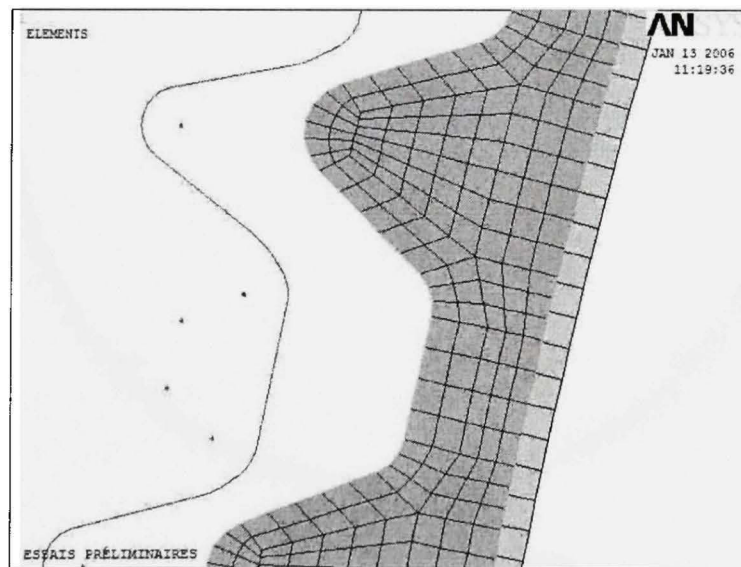
To reduce the CPU solving time we use two numerical models. The first model only takes into account the flexibility of the flexspline while the other considers only the circular spline as being flexible. This allows replacing a flexible to flexible contact between the FS and the CS teeth by two flexible to rigid contacts that are rapidly treated by the ANSYS solver. Total rotation for a given torque on the teathed part is obtained by adding the displacement of both models.

### **First numerical model – FS is flexible and CS is rigid**

To obtain the behaviour of this portion of the flexspline under torsional loading, two files were developed. The first file is used to insert the flexspline into the circular spline by deforming it using the wave generator. The other file contains macros that allow the application of forces which act as a torque on the flexspline. In order to model the actual behaviour of the device it is necessary to pre-stress the flexspline as it is pre-stressed while assembled with the wave generator. We use the pre stress terminology for this part of the analysis because the actual stress of the flexspline increases as the torque is applied. The following figures (See Figure 4 and Figure 5) represent the non deformed state of the model.



**Figure 4. Front view of the teathed portion of the flexspline**

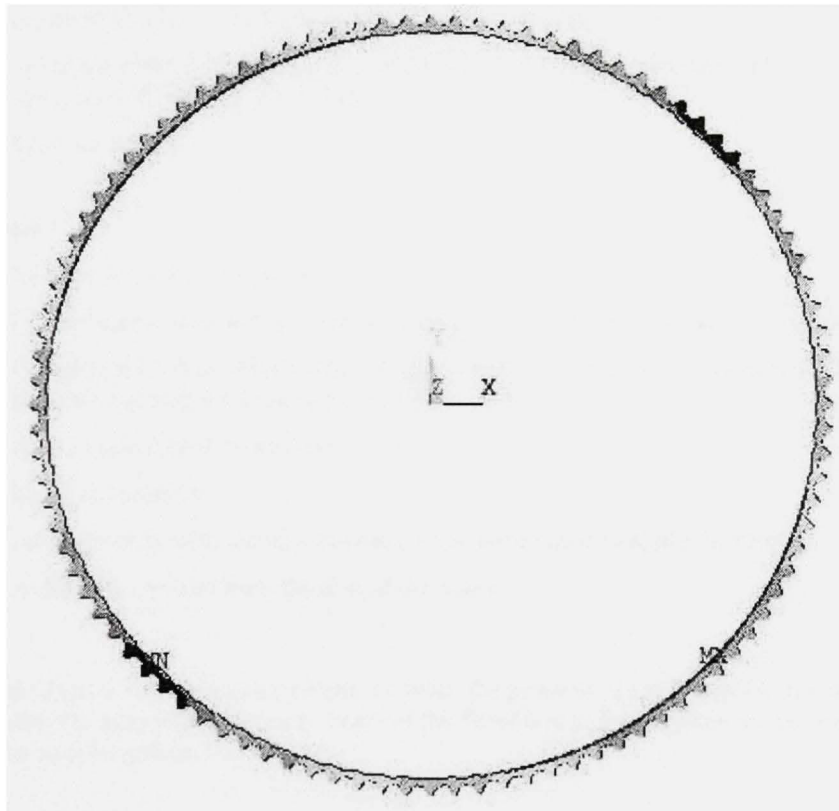


**Figure 5. Zoom picture showing the components of the model**

The previous figure (See Figure 5) is a zoom section of the teathed portion of the model. The elements in cyan color represent the flexspline while the grey elements form the wave generator and the magenta line is the circular spline profile. Areas of specific geometry are defined prior to mesh the flexspline in order to obtain plane elements that are not too distorted. The profile of the flexspline and circular spline teeth are slightly modified. Sharp edges are avoided to help the solution to converge and reduce localized important stresses. This

model also contains two contact pairs. One of this pair is located between the flexspline and the wave generator while the other is between the flexspline and the circular spline. For both contacts pairs, the contacts elements are on the profile of the flexspline while target elements are on the wave generator and on the circular spline. Since there are no plane elements underneath the target elements of the circular spline, this contact is a flexible to rigid contact type. We opt for this type of contact to reduce the number of plane elements and the computation time.

To perform this operation this component is modeled in its initial circular shape (See Figure 4) then deforms it. In reality the deformation is obtained while assembling the flexspline with the wave generator prior to slide these parts into the circular spline. Since the ellipse originated from the deformation of a circle, the ellipse and the circle have the same perimeter. Using arc segment length formulas for the initial circle and the ellipse we compare the position of the nodes at the end of each arc segment for the ellipse and for the circle. Finally, the displacements needed for these nodes to match the elliptic arc end point are calculated for any given angle of the circle since the axis dimensions of the ellipse as well as the circle diameter are known. These displacements are transferred from the wave generator to the flexspline via the contact pair between these components.



**Figure 6. Deformed flexspline**

Though it's hard to see on the previous figure (See Figure 6), the flexspline is deformed and its major axis is horizontal resulting in a lower position of the teeth on the upper side of the flexspline located on the minor axis. With this deformation, only teeth of the FS and of the CS close to the major axis engage. In our case the ratio between the minor and the major axis of the ellipse is close to 1 since the flexspline is only slightly deformed by the circular spline. Modeling the flexspline directly in its deformed position would have been easier but the results would have suffered from not having considered the pre-stress state. Moreover the meshing between teeth of the flexspline and those of the circular spline was incorrect while generating elements using an elliptic coordinate system. Thus deforming the flexspline as it is deformed by the assembly of the wave generator

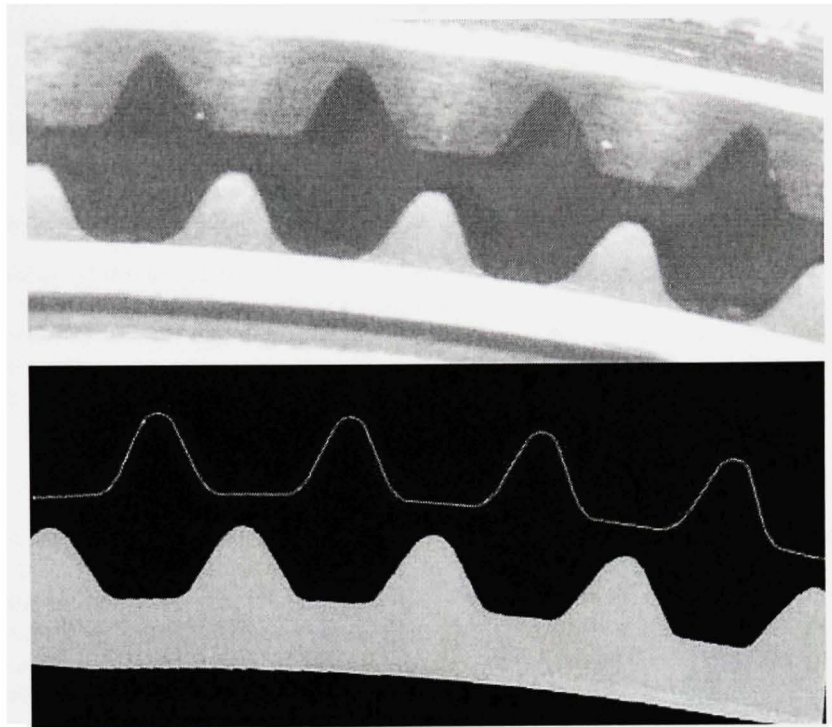
allow proper meshing between the teeth. While doing our first attempts to solve the problem, we encounter some difficulties to obtain a converging solution. The utilization of links (See Figure 4) to maintain the flexspline as it floats into the circular spline provide a significant benefit in reducing computation time. These links acts as weak springs and are really flexible in order to not affect the behaviour of the flexspline.

### ***Steps involved in FEA of the toothed portion of the flexspline***

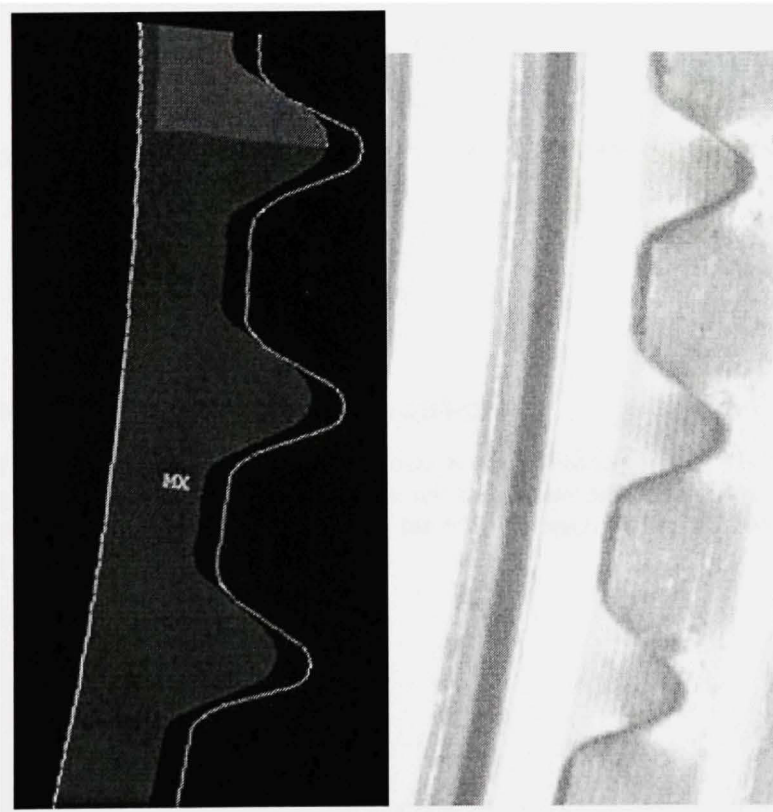
- First step
  - 1) Model and mesh the circular spline, and the flexible spline and the wave generator in their circular position
  - 2) Create a matrix that contains the position of the nodes that will be used to apply the torque
  - 3) Perform the CNCHECK, ADJUST command in the solution module to position the contact pairs correctly by reducing the out of range penetration between them
  - 4) Exit and re-enter the solution module to apply the displacement on the circular spline to d(Robert D. Cook, 2002)eform elliptically the flexible spline
  - 5) Solve the problem and verify the solution by looking at the contact status in the results viewer to make sure the teeth meshes properly
  - 6) Save the results
  
- Second step
  - 1) Resume the solution obtained previously
  - 2) Fill the matrix with the new positions of the nodes that will be used to apply the torque
  - 3) Compute the value of the radial and tangential forces that will be applied to these nodes to simulate the torque by using the data from matrix
  - 4) Apply these forces to the nodes
  - 5) Solve the problem
  - 6) Fill the matrix with the new position of the nodes used to apply the torque
  - 7) Analyse the results from the data of the matrix

The next figure (See Figure 7) shows a comparison between the position of the flexspline and the circular spline at the minor axis after the elliptic deformation. Teeth of the flexspline at this location are no longer in contact with the ones of the circular spline.





**Figure 7. Comparion at minor axis of the ellipse**



**Figure 8. Comparion at major axis of the ellipse**

The previous figure (See Figure 8) shows a comparison between the position of the flexspline and the circular spline at the major axis a step before the total elliptic deformation. The next step is required in order to have full contact between the flexspline and the circular spline. Both pictures of the actual harmonic drive come from a microscope equipped with a digital camera.

## Second numerical model – CS is flexible and FS is rigid

This model is build using the displacement results of the FS from the first numerical model. The contact pair element types are reversed so the FS consists of target elements and the CS of contact elements. The FS is model in it's deform shape with target elements only on surfaces that may become in contact with the ones of the CS. Forces are applied on the external nodes of the CS and the rotation of the CS for specific torques is calculated to obtain a relation between these quantities.

### ***Modeling of the mid portion of the flexspline***

Torsion of the mid portion of the flexspline which represent a hollow cylinder does not require finite element analysis because its torsional deformation can be computed using basic strength of materials formulation. Even if this portion of the flexspline has one of its end round and the other elliptic we assume that we could consider it as a cylinder since the ellipse ratio is really close to 1. The next equation is use to evaluate an equivalent torsional spring constant for this portion of the flexspline where G refer to the shear modulus of the material, I to the polar moment of inertia and L to the length of this portion.

$$k_t = \frac{G \cdot I}{L}$$

The polar moment of inertia can be computed from the next equation using the dimensions of the flexspline.

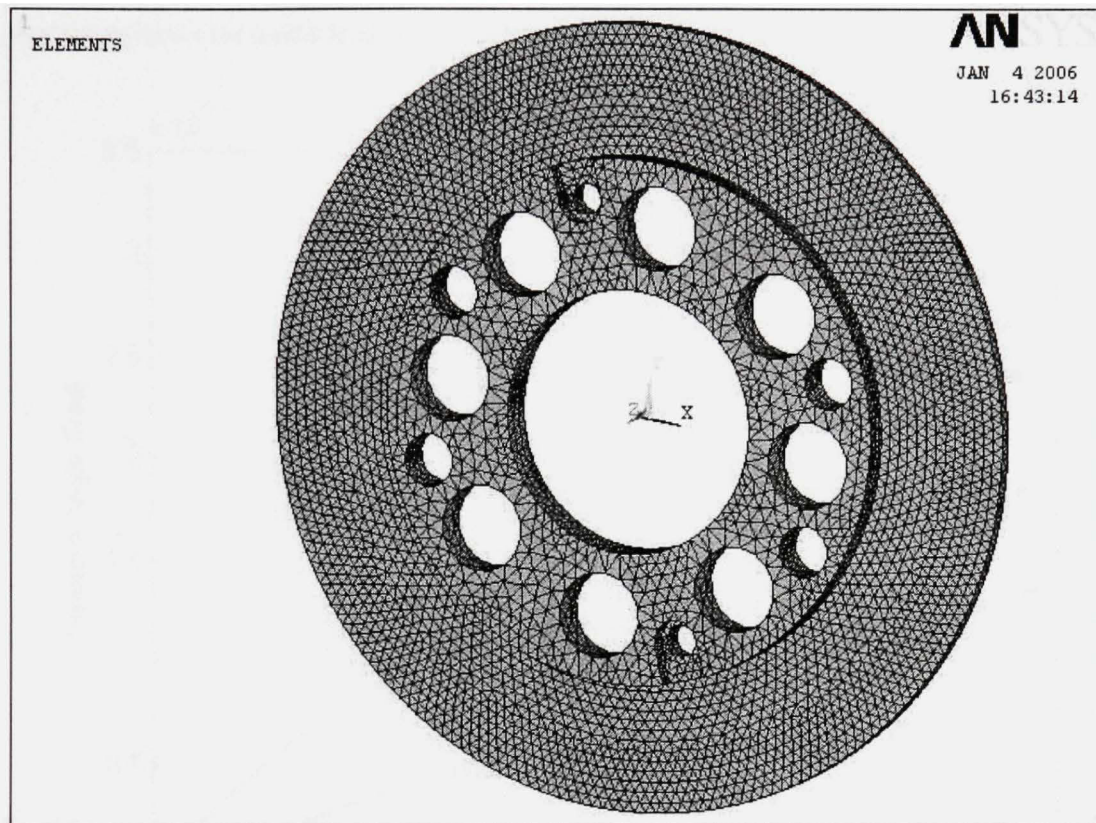
$$I = \frac{\pi(d_{out}^4 - d_{in}^4)}{32}$$

Finally the next equation is the relation between torsional angle of this portion of the flexspline under a torque load.

$$\theta = \frac{T}{k_t}$$

### ***Modeling of the back portion of the flexspline***

The bolt pattern of this portion carry the torsional loading to the cylindrical section of the flexspline up to its front part that contains the teeth squeezed between the wave generator and the circular spline. The torsional stiffness of this disc is approximated with strength of materials formula. To validate these results this part is also modeled using finite elements. (See Figure 9).



**Figure 9. The meshed volume**

The nodes located on the external surface of the larger diameter of the model are restrained from moving in any direction. The torque is applied through the eight holes of the bolt pattern. Instead of modeling a cylinder and a contact pair to represent the interface between the bolt and the hole, we use a spider web of links. These highly rigid links have a really low density and only act in compression. Thus they replicate effectively the loads given from the bolts to the part. Though the nodes located at the center are the ones that have the larger displacement, those which are connected to the link elements at the center of the bolt pattern holes are the ones that rotate the most. The nodes on the edge of the center hole have the greatest displacement because the twisting forces on the center of the back portion pushes the center out of the plane.

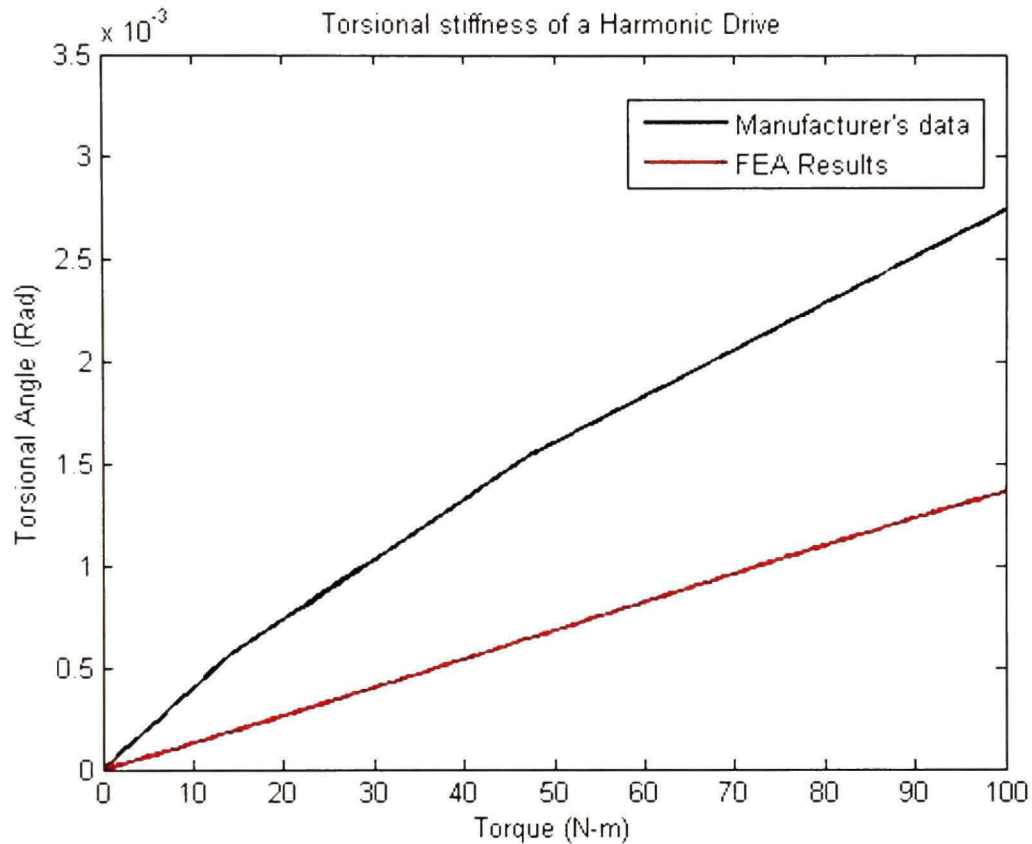
## Analysis

From the simulations and the calculations we performed, we determine that the results we obtained with the numerical model were different than the ones from the harmonic drive manufacturer. Results from the experimental research on harmonic drive [3],[4] mentioned that the stiffness curve provided from the manufacturer can be significantly different than the ones obtained with measurements. Even harmonic drive manufacturer warns the clients that a 30 % deviation between quoted and actual values is not uncommon. During his experiments Tuttle [4] also obtain stiffness curve that were 60% stiffer than the optimal stiffness stated from the manufacturer. Many factors such as the depth of the wave generator into the flexspline and its angular position could affect appreciably the stiffness results of our experiments. To plot our results we simply combined the results from all our models. The angle of rotation of each portion for a given torque can simply be



added to obtain the global results since these portions act as serial torsional springs. These types of springs are subjected to an equivalent torque but their rotations differ because their stiffness are different.

The next figure shows the results from our calculations and simulations.



**Figure 10. Comparaision of results with manufacturer data**

## Analysis Results & Discussion

The stiffness curve we obtained is approximately 50% stiffer than the manufacturer's average results. Before comparing any results we expected that our results would be stiffer than the specifications because of the way we modeled the teethed portion of the flexspline. The applied displacement on the wave generator made impossible any other deformation than the elliptic shape. Even though ball bearings are stiff, modeling these balls as linear springs might have changed our results. Moreover, a detailed study of the meshing process convince us that a three dimensional model of the teethed portion might have been more appropriate. The twisting action of the torque may deform the teeth of the flexspline to a point where they could become out of plane. This deformation would reduce the stiffness of the device since only a reduced length of the teeth would be in contact with the circular spline. This three dimensional model of the teethed portion could also be more accurate to replicate the hysteresis effects as well as the starting torque of harmonic drive. On the other hand we are really confident that the stiffness coefficient determined for the back portion of the flexspline and for its cylindrical part are accurate. The cylindrical portion of the flexspline has an approximate stiffness coefficient of 300000 N-m/radian while the one of the back portion is estimated to be 290000 N-m/radian.



## Conclusion

The analysis revealed that the stiffness curve we obtained with this study is stiffer than one provided from the manufacturer of the harmonic drive. On the other hand, we determine that this highly stiffness has probably been caused from the use of a two dimensional model for the teathed portion of the flexspline. The choice of a rigid wave generator also stiffens our stiffness curve. We are now working on the development of a more accurate numerical model as well as a testing apparatus to make validations. Future developments will also include sensitivity analysis on different parameters of the harmonic drive.

## References

- 1) N. M. Kircanski, A. E. Goldenberg, An experimental study of nonlinear stiffness, hysteresis, and friction effects in robot joints with harmonic drives and torque sensors, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No. 2, April 1987, Cambridge, Ma.
- 2) Y. Kiyosawa, M.Sasahara, S. Ishikawa, Performance of a strain wave gearing using a new tooth profile, *ASME*, 1989, Chicago, Il.
- 3) G. Legnani, R. Faglia, Harmonic Drive transmissions: the effects of their elasticity, clearance and irregularity on the dynamic behavior of an actual SCARA robot, *Robotica*, 10:369-375, 1992
- 4) T. D. Tuttle, Understanding and modeling the behavior of harmonic drive transmission, Massachusetts Institute of Technology, 1992, Cambridge, Ma.

## **ANNEXE II**

### **UNDERSTANDING AND MODELING THE TORSIONAL STIFFNESS OF HARMONIC DRIVES THROUGH FINITE ELEMENT MODELING**

Cette section présente la modélisation par éléments finis du démultiplicateur harmonique suivant la théorie expliquée dans les chapitres précédents. Ce travail fait l'objet d'un article soumis pour publication au journal *Mechanism and Machine Theory* de l'éditeur Elsevier. Les auteurs sont : François Etienne Rhéaume (ETS), Henri Champlaud (ETS) et Zhaoheng Liu (ETS).

## **Abstract**

Torsional stiffness or rigidity is a crucial characteristic in the design of transmission devices, including harmonic drives (HD). Among the various design aspects comprised in a reduction mechanism in robotic systems, torsional stiffness is an important factor for positioning accuracy and control issues. One of the major advantages of harmonic drives is their capacity to present a high reduction ratio while maintaining a small hardware size. However, manufacturing these drives remains a complex and costly process due to the high precision of its machined components; as a result, the use of such drives is therefore still limited only to high-end mechanical products and technologies. Given these costs, numerical analysis becomes an effective alternative for obtaining valuable data through simulations, without the need for prototypes. This paper presents a finite element model (FEM) used to reproduce the behavior of the torsional stiffness of a harmonic drive. The numerical model allows an evaluation of the effects of various geometrical parameters on the torsional stiffness of the HD. The numerical model of the HD can be used for optimization purposes, i.e., to develop an HD with a high torque capacity combined with a high-rated lifespan.

## **1. Introduction and literature survey**

Harmonic drive gearing, also known as strain wave gearing, is a constant ratio mechanical drive system used for angular positioning or power transmission. Primarily used for robotics applications, harmonic drives are now found in many devices, ranging from machine tools to medical equipment. The harmonic drive consists of three components: the wave generator (WG), the flexible spline (FS) and the circular spline (CS) (See Figure 1).

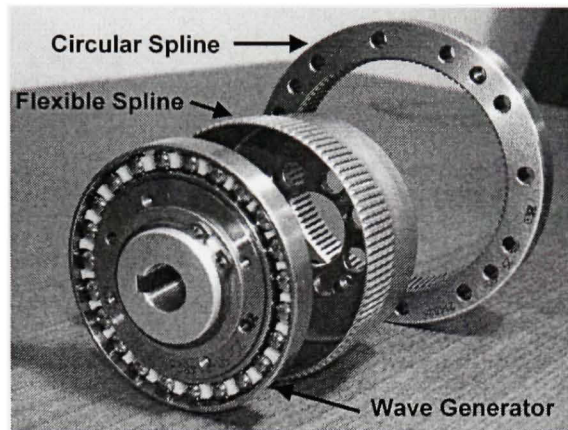


Figure 1: Typical components of a harmonic drive

The wave generator is an elliptical rigid part surrounded by ball bearings retained by a flexible metal strip. As the input shaft of the mechanism rotates, the central section of the wave generator deforms the flexible external ring when it contacts the ball bearings located in between the components. The flexible spline is a thin-walled cylinder cup fitted with teeth on the outer surface of its open side, while the closed side of the cup is a thick wall usually connected to the output shaft of the assembly, and the circular spline consists of a thick ring with teeth on its inner surface; these teeth engage with those of the flexible spline and a hole pattern, and allow the circular spline to be mounted on the housing of the HD. The teeth of the circular spline do not fully mesh with those of the flexible spline due to the elliptical geometry of the flexible spline once it is assembled with the wave generator (see Figure 1). Usually, power is transmitted from the wave generator to the flexible spline, which rotates in the direction opposite to that of the wave generator, while the circular spline is maintained at a fixed position.

Developed more than forty years ago, HDs are still being studied by engineers trying to improve their performance. This is due to the complex principle underlying this device, which is based primarily on the elastic deformation of the flexible spline, which is limited in displacement by the surrounding more rigid components of the HD (i.e., the CS and the WG). The literature on harmonic drives shows that the relationship between the torque and the torsional angle of the drives due to elastic deformation is nonlinear [1-5]. Figure 2 shows a typical HD torsional stiffness curve.



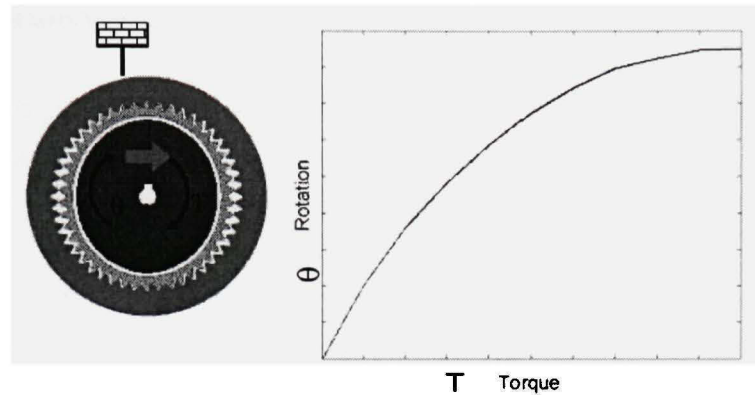


Figure 2: Typical HD torsional stiffness curve

For applications requiring high positioning accuracy, this nonlinear stiffness behavior should be considered, and control systems may be required to improve their performance [1, 3]. This behavior can be traced back to the deformation of the harmonic drive components when subjected to significant torques. It has been demonstrated through experiments and the finite element model that the contact areas in between the teeth of the FS and the CS increase with the applied torque [6, 7]. This increase in the contact areas is due to additional teeth being engaged and to the expansion of the contact surface of the teeth that have already been meshed. This results in increased restraints on the toothed part of the flexible spline, limiting its deformation. The torsional stiffness of the HD has been improved through the development of a new tooth profile [8]. Furthermore, the dynamic behavior of the HD has also been studied through research projects [9-11] in which composite materials have been used to manufacture certain parts of the flexible spline, or simply applied on its inner surface. Results show an increase in vibration damping and in the fundamental natural frequencies versus what is obtained with the traditional flexible steel spline. However, no such harmonic drives are currently available on the market, probably due to their high manufacturing costs. The development of finite element-based software capable of simulating complex contact problems has allowed researchers to carry out more realistic studies of the HD behavior. A finite element model has been used to compute the stress level of the FS [6], and another developed to optimize tooth shape [12] with respect to stress in the FS, an important limiting factor which may cause fatigue failure of the HD. However, the literature does not provide information on how the components of the HD contribute to its torsional stiffness or on the effect of their geometry on this characteristic or on their stress level. The HD finite element model presented in this paper is used to study the sensibility of the torsional stiffness to geometrical parameter variations. The results presented in the following sections also show that this numerical model can be used to reduce HD development costs by reducing prototype needs.

## 2. Finite element model of the HD

In this work, the first approach used to model the HD was based on the premise that the teeth act in two dimensions only, and assuming that 2D behavior, only the bending of the teeth was modeled when the torque was applied to the drive. The torsional stiffness of the thin part of the flexible spline was treated as being equal to that of a cylindrical hollow shaft. A FEM was developed to compute the torsional stiffness of the aft part of the flexible spline, which is the coupling of this structure. Combining and comparing the results obtained through this approach with the results published by the HD manufacturer, we saw that this model successfully reproduced the nonlinear behavior of the HD. However, it proved to be much stiffer than what is available in the literature. To improve the modeling accuracy, this paper presents a three-dimensional finite element model of an actual HD developed to reproduce the HD behavior, given that the aforementioned (2D) methodology did not take into account the complex deformation of the flexible spline under loading conditions. Each part of the HD undergoes some degree of modeling in order to replicate the torsional stiffness of the actual HD and to minimize computational time. The ANSYS software is used as it has proved to be effective in simulating complex contact problems [13]. Geometrical dimensions were measured in the laboratory for this study. All components presented in this paper are equipped with a structured mesh to improve accuracy and reduce computational time [14]. Figure 3 shows the model of the HD created using the gathered data. It contains approximately 60,000 uniaxial, brick, shell and contact elements. The following sections present the components of the harmonic drive and their finite element models.

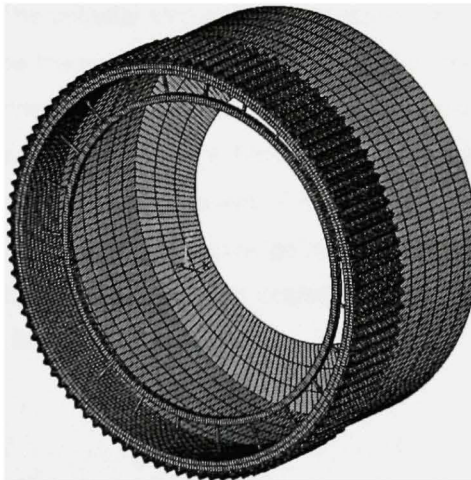


Figure 3: Finite element model of the HD

### Modeling the wave generator

Even though the wave generator shown in Figure 1 seems to be a fairly rigid structure, it is modeled taking into account the radial forces that are acting on the ball bearings. The wave generator is modeled through three distinctive parts: an inner and an outer ring and uniaxial elements; the inner and outer rings are made of brick elements connected together through compression-only uniaxial elements (see Figure 4).

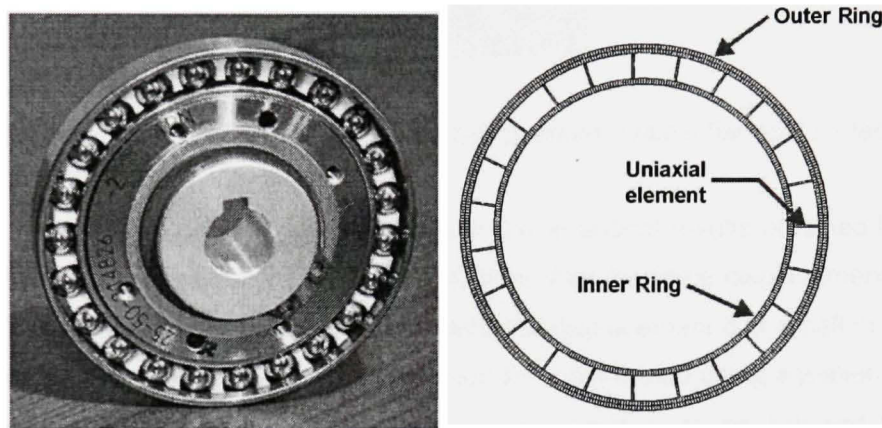


Figure 4: Finite element model of the wave generator

The uniaxial elements are used to simulate the flexibility of the ball bearing located within the wave generator. Displacements are imposed on the inner ring of the structure in order to deform the flexible spline into its elliptical shape. The uniaxial elements connected to the inner ring are then pushed as a result of this deformation. Since these elements are connected to the outer ring, the outer ring also takes an elliptical form. This ring acts as the outer face of the wave generator. Contact elements located on its external surface ensure that the flexible spline adopts the same geometry as this structure. Note that the friction coefficient between the outer ring of the wave generator and the flexible spline is equal to zero, given that the wave generator is an elliptical bearing that can rotate freely without significant friction. To ensure greater accuracy in the 3D model, an axisymmetric FEM of the ball is used to determine its stiffness (Figure 5).



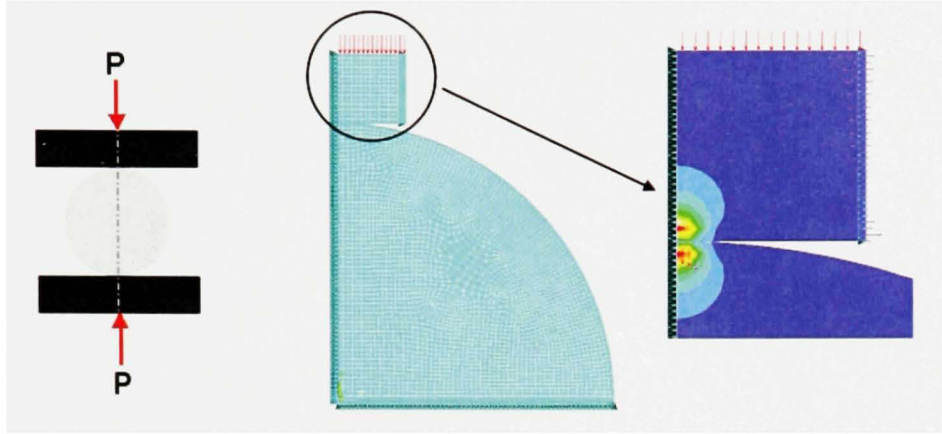


Figure 5: Axisymmetric model of half a ball pressed against flat rigid surfaces

The results of the simulations are in agreement with the analytical results obtained by equations (1) and (2) [15] (see also the results in Figure 6), and show that the force-displacement relationship for the ball is not linear. Equation (1) is used to compute the displacement  $\delta$  of a ball of radius  $R$  loaded with an external load  $W$ . The elastic contact modulus  $E^*$  is computed using equation (2), considering the Young modulus  $E_1$  and  $E_2$  and the Poisson ratios  $\nu_1$  and  $\nu_2$  of the ball and the surface it is pressed against, respectively.

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9W^2}{16E^*R}} \quad (1)$$

$$E^* = \frac{1}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \quad (2)$$

The FEM and the relations used to determine the ball's stiffness assume that only the balls are flexible as the deformation of the external surface of the WG is obtained through the outer ring modeled (Figure 4). Note that the part of the WG used as the connection of the mechanism is not modeled since it is assumed to be rigid due to its massive design. The stiffness of the ball increases as the load is incremented (Figure 6) due to the expansion of the contact area.



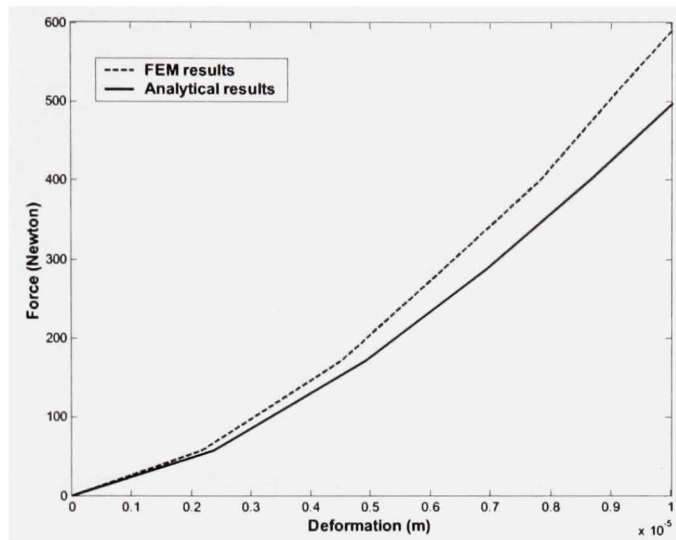


Figure 6: Force-displacement curves for a 5.75 mm diameter steel ball pressed between flat rigid surfaces

The ball's stiffness is computed with the assumption that it is pressed against flat surfaces because the radiiuses of the inner and outer rings of the wave generator are much greater than that of the ball. During the deformation process, the loads on links representing the ball ( $k_r$  elements on Figure 7) vary from no load to 400 Newton meters. However, a constant value of 38000 N/m is used to characterize the stiffness of the ball and to simplify the model. This value is obtained through an iterative process that consists in determining an arbitrary stiffness value for the elements which represent the ball, and obtaining realistic axial forces on the links through FE simulation. Using the force-displacement curves of this ball (Figure 6), the stiffness is obtained by evaluating the average slopes of the curves for the corresponding force read previously. Adjustments are made to the properties of these elements in order to obtain an adequate stiffness. Additional elements ( $k_r$  elements on Figure 7) connected at the tip of the radial uniaxial elements are employed as weak springs to keep the links representing the ball in place (see Figure 7). Their stiffness is significantly lower than that of the links elements representing the ball, and does not affect the results shown in section 3. All uniaxial elements react only in compression to reflect the behavior of the ball bearings. The simulation results demonstrate that it was unnecessary to consider the contact and the gaps between the ball because they are mostly subjected to radial forces due to the elliptical deformation of the FS and the loads on its teeth.

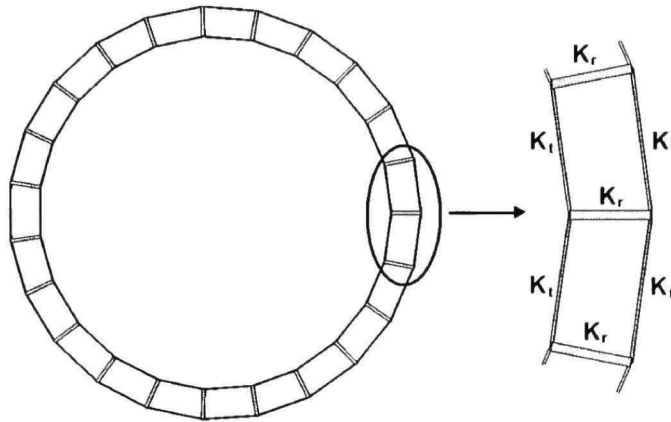


Figure 7: Uniaxial elements of the wave generator

The major benefit with using compression-only uniaxial elements to represent the balls is that this method eliminates the difficult tasks of predicting the displacement of these balls under the elliptical deformation as well as when the torque is applied. The finite element model takes these effects into account during the simulations. The software used in this research allows the utilization of axial elements that can be programmed to characterize a nonlinear stiffness. However, axial elements with linear stiffnesses are used in the current FEM to model the balls to reduce the computation time, given that a high number of contact elements are used and that these elements already required a nonlinear solution path.

#### Modeling the flexible spline

The teeth of the flexible spline are modeled with 8-node brick elements (see details in Figure 8). Contact elements, placed on the external surfaces of these bricks, make it possible to control the sliding between the teeth of the flexible spline and those of the circular spline. The remaining portion of the flexible spline is modeled with shell elements since these elements are best suited for thin sections. Constraint equations between the solid elements of the teeth and the shell elements of the cup are used in order allow the parts to remain mated under deformation of the flexible spline. Numerical experiments have shown that finite element modeling involving contact surfaces is time-consuming because the associated analyses are highly nonlinear [14]. First-order-type brick elements roughly represent the external shape of the teeth that actually contain continuous smooth curvatures along their profiles. These elements are used to reduce computational time and to accelerate the convergence of results. The flexibility of the section of the FS that contains the bolt pattern has been considered and has been computed through another FEM. The torsional stiffness of this portion of the FS is linear, and is approximately 530,000 N.m/rad.

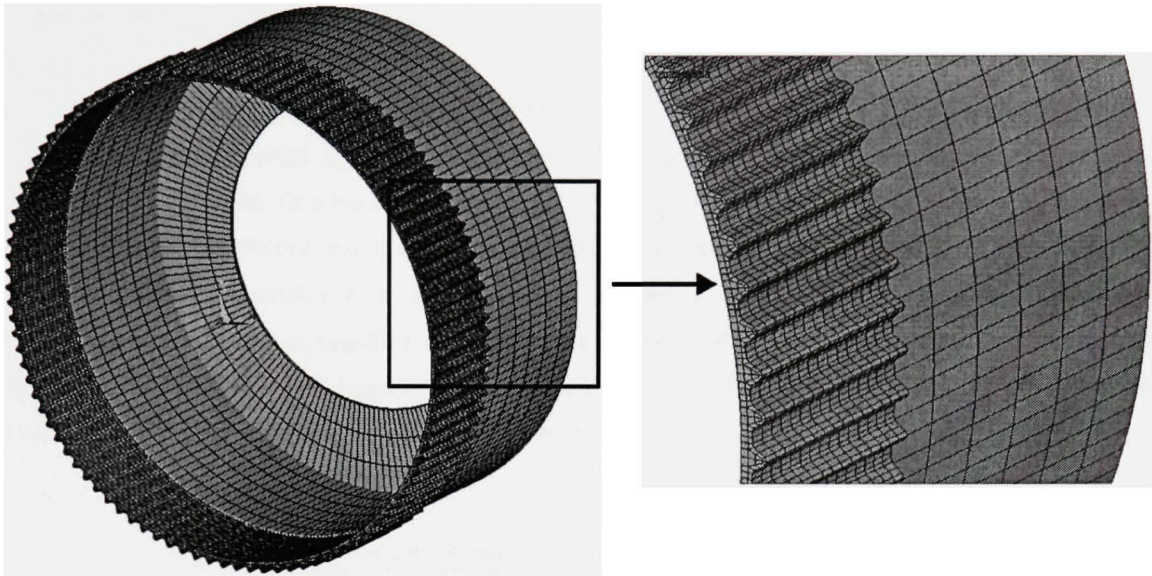


Figure 8: FEM of the flexible spline

#### Modeling the circular spline

The teeth of the circular spline are assumed to be fully rigid because they have a much wider root tooth section than does the FS. The profile of this component is modeled as a rigid surface that restrains FS displacements.

#### Numerical procedure, loads and boundary conditions

In order to replicate the complex meshing process between the flexible and the circular splines, two load cases are used. The first applies a prescribed displacement to the inner ring of the wave generator shown in Figure in order to deform the flexible spline into its elliptical shape within the circular spline. This first load case represents the insertion of the wave generator mechanism into the flexible spline. In the second load case, the wave generator and the flexible spline remain deformed, and forces, applied tangentially on the closed section of the flexible spline, simulate the applied torque on this component. For both load cases, the nodes of the WG and of the closed portion of the FS are restrained from moving along the axis of rotation of the HD in order to reduce the number of degrees of freedom. Results are analyzed for different values of torque on the HD to obtain the torsional stiffness curves presented in sections 3 and 4. The sparse solver [16] is found to be the most efficient in accomplishing these tasks.



### 3. Simulation results

Figure 9 presents the torsional stiffness of the numerical model of the HD previously described compared to that provided by the manufacturer. This graph also contains two additional curves developed with the FEM described previously, for which the stiffnesses of all the balls of the WG have been modified. The dotted curve is obtained by increasing the stiffness value of the radial links of the WG and the dashed-dotted line is obtained when elliptically deforming the WG with displacements imposed on its outer ring to simulate balls with infinite stiffnesses. The area comprised between the dashed curve ( $K_r=38000$  N/m) and the dotted curve ( $K_r=114000$  N/m) corresponds to the envelope of the torsional stiffness response of the FEM of the HD.

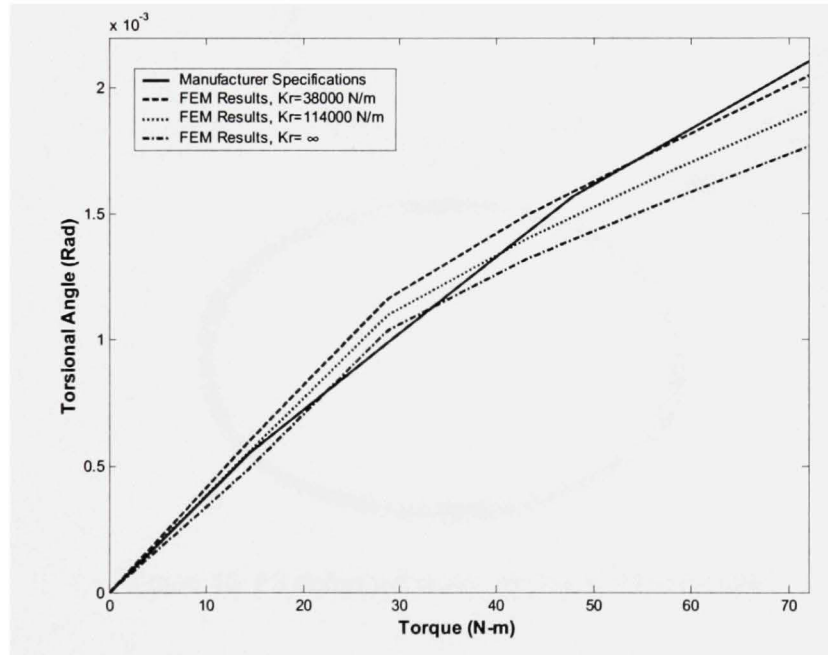


Figure 9: Torsional stiffness curve of the numerical model compared to manufacturer's data

Figure 9 shows that the FEM can correctly reproduce the nonlinear behavior of a loaded HD. However, the torsional stiffness curve obtained from the FEM is slightly stiffer than the one provided by the manufacturer, especially for higher torques. Considering that the actual torsional stiffness of an HD can vary by up to 15% compared with the manufacturer's specifications [17], the FEM of the HD is deemed accurate and efficient in providing rapid results.

It is clear that the FEM of the HD can correctly reproduce the complex deformation phenomenon of the FS under loading. Figure 10 demonstrates that the deformation of the FS modeled (lower image)



is in agreement with the one obtained from the literature [12] (upper image). While a torque in the counterclockwise direction is applied through the FS, this component partially loses contact with the WG in the 2<sup>nd</sup> and in the 4<sup>th</sup> quadrants. This is also notable in Figure 11, where the links at these locations (150° and 330° approximately) are unloaded. On the upper image of Figure 10, the FS shape deformed as a result of the applied torque is represented by the dashed line; the inner and outer solid lines respectively show the WG shape and the FS deformed from the WG insertion. The FEM deformation (Figure 10 b) is amplified 15 times and only the toothed portion of the FS is shown to better represent its deformation.

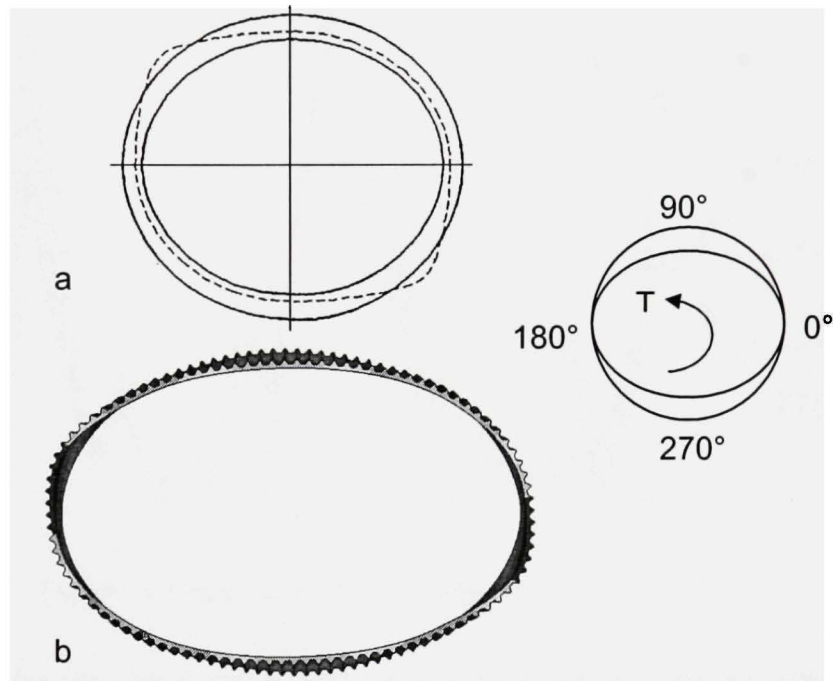


Figure 10: FS deformed shape a) [12], b) FEM results

Figure 11 presents the force distribution on the radial links of the WG for different values of torque. This figure is presented as a reference which is useful for understanding the loads distribution on the balls of the WG. The curves are plotted as piecewise linear interpolations from data of the FEM solution. The actual load distribution on the balls of the WG may differ slightly from Figure 11 considering that the links are attached to the inner and outer rings of the WG while the balls of an actual HD are restrained between these structures due to frictional forces. Nevertheless, Figure 11 demonstrates the following facts:

- The forces exerted on the balls are at their highest values on the major axis of the WG (0°), and there are almost no forces on the balls positioned inline with the minor axis of the WG (90°).

- The force distribution is quasi-symmetrical over half the circumference of the WG, and the forces on the balls increase following the torque augmentation.
- The loads distribution on the WG also follows a constant tendency over the torque range simulated.
- The loss of contact between the FS and the WG significantly lowers the loads on the balls located in this region.

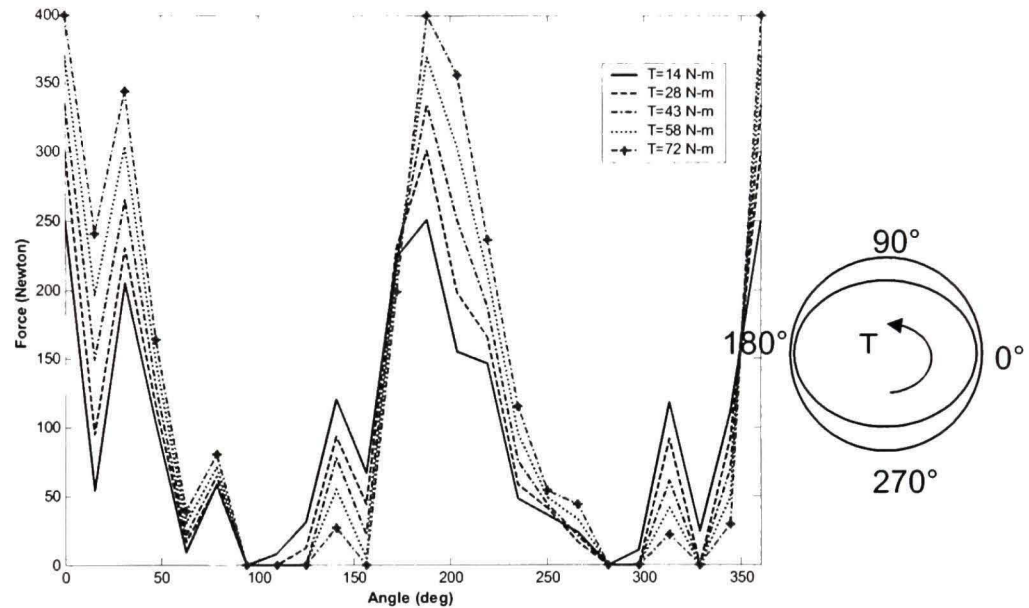


Figure 11: Force distribution on radial links

Simulations on an FEM of the HD, with displacements imposed directly on the outer ring of the WG (see Figure) to simulate a perfectly rigid WG, show that the radial stiffness of this component has a significant incidence on the torsional stiffness of the HD. Compared to the results of the FEM with the proper WG rigidity, the torsional stiffness is approximately 20% higher (Figure 9). This result can be attributed to the variation of the tooth penetration depth of the FS within the CS along the major axis of the WG. Section 4 presents analyses in which the geometry of the WG is modified to simulate the effect of the meshing process between the FS and the CS on the torsional stiffness of the HD.

Analyses were conducted to evaluate the influence of the mesh density of the teeth on results. Figure 12 shows the grids used to compare results.

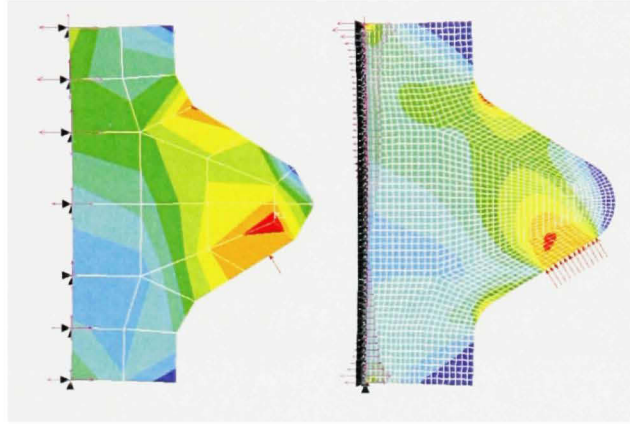


Figure 12: Coarse and fine mesh of the flexible spline tooth

Results reveal that the coarse grid used in the FEM of the HD is slightly stiffer in bending and in torsion than the refined one, mostly due to a more accurate representation of the tooth bottom radius profile. Therefore, it can be assumed that the implementation of such a fine grid to the teeth of the FS would have been beneficial by providing a smoother stress gradient within the teeth and a better estimate of the torsional stiffness of the HD. However, this refined model was not adopted for the FEM of the HD as it would have resulted in a significant increase in the number of elements and of CPU time required to obtain the results. On actual HD, the FS is machined to smoothly join the teeth to the thin part of its cup.

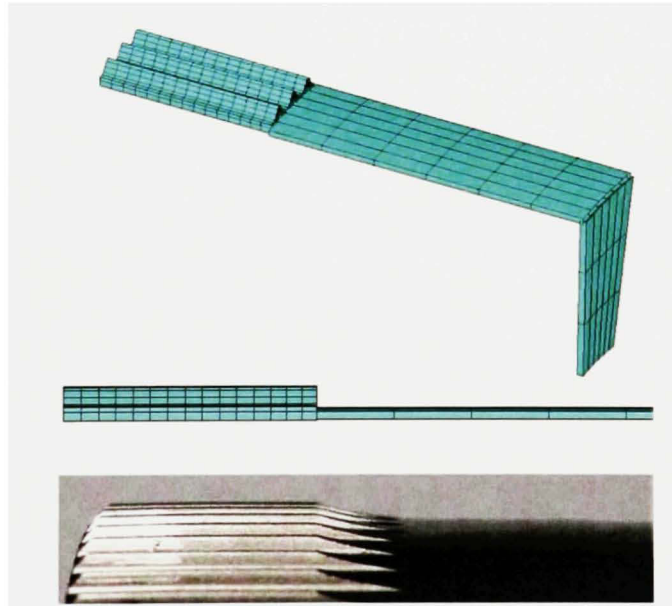


Figure 13: Transition of geometry of FS between its cylindrical and toothed portions (FEM and actual HD)

In the FEM, this smooth transition between the teeth and the cylindrical part of the FS is not modeled because the brick elements are joined to the shell elements using multipoint constraint equations (MPC) (Figure 13). This modeling approach reduces the number of elements of the FEM, but also slightly reduces the stiffness of the FS and causes significant stress levels around the junction of the solid and shell elements. This should therefore be considered if the current model is to be used to perform stress analyses at this location of the FS. Apart from this local loss of accuracy due to the MPC, the FEM of the FS is properly meshed, and provides realistic stress levels [6, 11] and gradients.

Using a desktop computer with dual core processors clocked at 3.8 GHz and 4 GB of RAM, the numerical model supplies data such as applied torque versus torsional angle or stress level in under 20 hours of CPU time, to characterize the device over its range of operation.

#### 4. Sensitivity analysis of HD stiffness on the WG eccentricity

This section of the paper was developed in order to study the effect of the manufacturing tolerances of the HD components on its torsional stiffness response based on the fact that HD components are not interchangeable between sets. Numerical simulations, in which the ellipse ratio was intentionally modified, showed that the flexible spline tooth penetration within the circular spline plays a very important role in the torsional flexibility of the HD (see Figure 15). Eccentricity of an ellipse is defined in terms of a numerical factor expressing the elliptic curvature. It is computed as:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3)$$

where “a” and “b” are the major and the minor axes of the ellipse, respectively (Figure 14).

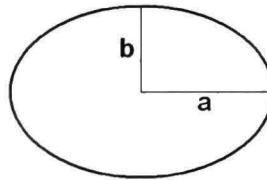


Figure 14: Ellipse axes

In order to study the influence of the ellipse eccentricity, the dimensions of the major and of the minor axes of the WG are modified while retaining the same perimeter value as the manufacturer's, using equation (4) developed by Ramanujan [18].



$$P = \pi(a+b) \times \left[ 3 - \sqrt{4-h} \right], \text{ where } h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \quad (4)$$

This equation is a truncation of the series developed to evaluate the perimeter of an ellipse, and is sufficiently accurate for the purposes of this study. Figure 15 shows the variation in the torsional stiffness of the HD studied as the shape of its wave generator varies.

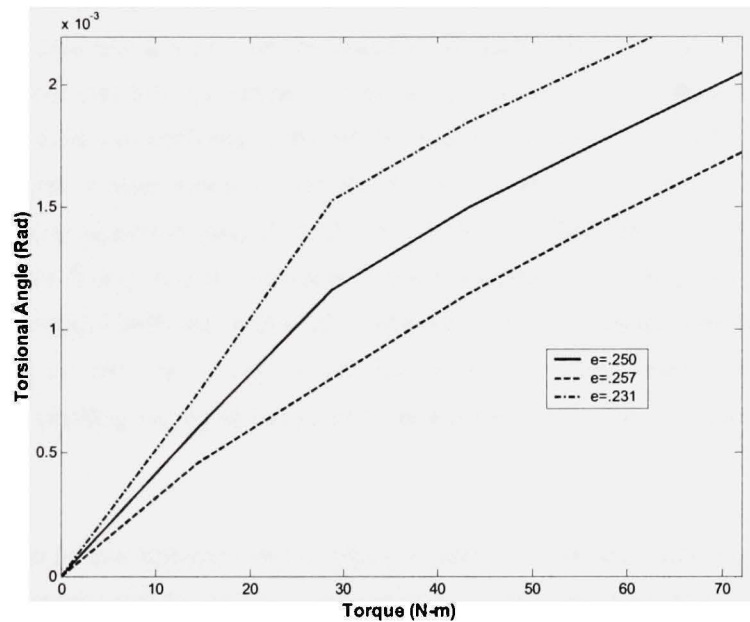


Figure 15: Effect of the ellipse ratio of the WG on the HD stiffness

The variations of eccentricities correspond to an increase or decrease in the major axes of the WG of approximately 0.05 mm, for a nominal length of 31.14 mm, i.e., only 0.16%. Because such small changes in wave generator dimensions can lead to significant torsional stiffness variations of the HD, the stiffness of the WG must be taken into account in any FEM developed to determine the torsional stiffness of an HD. The radial forces acting on the wave generator affect the tooth penetration of the flexible spline within the circular spline and consequently, the resulting torsional stiffness of the numerical model. It can be concluded therefore that maintaining a rigorous manufacturing tolerance for HD components is of the utmost importance for HD manufacturers.

## 5. Conclusion

The numerical model proposed in this study was found to be effective in predicting the torsional stiffness of a harmonic drive over its range of operation. Additionally, this model can provide an estimation of the stress level to which the flexible spline is subjected, and can be used to evaluate its fatigue life. Parametric analyses demonstrate that the radial stiffness and dimensions of the wave generator have a significant effect on the torsional stiffness of the harmonic drive, and that the deformation of this component must be considered if the FEM of an HD is used for this purpose. Therefore, highly precise tolerances must be maintained during the HD manufacturing process. The simulations also reveal that the cylindrical and closed sections of the flexible spline account for as much as 50% of the torsional stiffness of the HD for low torque values ( $T < 20$  N-m), but decrease to 10% when the applied torque starts to deform the FS teeth ( $T > 40$  N-m). The wave generator constantly contributes to approximately 20% of the HD torsional flexibility over the range of operation of the HD. It was also found that an increase in the thickness of the flexible spline cylindrical part results in a higher torsional stiffness of the HD; however, a stress increase was noticed at the bottom of the teeth located on the major axis of the flexible spline. This stress increase is due to the augmentation of the bending forces at the junction of the teeth with the cylindrical part of the flexible spline.

In order to pursue the further development of HD, the plan is to use the FEM developed in this paper in conjunction with experiments to perform dynamic and vibration HD analyses.

## Acknowledgment

The authors acknowledge the financial support granted by the NSERC and the General Electric Company for this research.

## References

1. Nenad M. Kircanski, A.A.G., *An Experimental Study of Nonlinear Stiffness, Hysteresis, and Friction Effects in Robot Joints with Harmonic Drives and Torque Sensors*. The International Journal of Robotic Research, 1997. **16**(2): pp. 214-239.
2. Timothy D. Tuttle, W.P.S., *A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996. **12**(3): pp. 368-374.
3. W. Seyffertf, A.J.M., J. Angeles. *Nonlinear Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Robotic Transmissions*, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995: IEEE.
4. T. Hidaka, T.I., Y. Zhang, M. Sasahara, Y. Tanioka. *Vibration of a strain wave gearing in an industrial robot*, in *International Power Transmission and Gearing Conference*. 1990: IEEE.
5. Giovanni Legnani, R.F., *Harmonic drive transmissions: the effects of their elasticity, clearance and irregularity on the dynamic behaviour of an actual SCARA robot*. Robotica, 1992. **10**: p. 369-375.
6. Masanori Kikuchi, R.N., Yoshihide Kiyosawa, Xin-Yue Zhang, *Stress Analysis of Cup Type Strain Wave Gearing*. Key Engineering Materials, 2003. **243-244**: pp. 129-134.
7. Shuiping Huang, T.I., Teruaki Hidaka, *Experimental Study on Load Transmission of Strain Wave Gearing*. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1994. **60**(578): pp. 3526-3532.
8. Y. Kiyosawa, S.I. *Performance of a Strain Wave Gearing Using a New Tooth Profile*, in *ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. 1989: ASME.
9. Kwang Seop Jeong, D.G.L., Se Hoon Oh, *Development of the composite flexspline for a cycloid-type harmonic drive using net shape manufacturing method*. Composite Structures, 1995: pp. 557-565.
10. Se Hoon Oh, S.H.C., Dai Gil Lee, *Improvement of the dynamic properties of a steel-composite hybrid flexspline of a harmonic drive*. Composites Structures, 1997. **38**: pp. 251-260.
11. Han Su Jeon, S.H.O., *A study on stress and vibration analysis of a steel and hybrid flexspline for harmonic drive*. Composite Structures, 1999: pp. 827-833.
12. Oguz Kayabasi, F.E., *Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modelling*. Materials and Design, 2007: pp. 441-447.
13. Wei, Z., *Stresses and deformation in involute spur gears by finite element method*, in *Mechanical Engineering*. 2004, University of Saskatchewan: Saskatoon, p. 96.
14. Robert D. Cook, D.S.M., Michael E. Plesha, Robert J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th edition ed. 2002, New York: John Wiley & Sons, Inc.
15. R.D. Arnell, P.B.D., J. Halling, T.L. Whomes, *Tribology: Principles and Design Applications*. 1st Edition ed. Vol. 1. 1991, London: MACMILLAN EDUCATION LTD. 255.
16. *ANSYS Release 9.0 Documentation*.
17. Tuttle, T.D., *Understanding and modeling the behavior of a harmonic drive gear transmission*, in *Mechanical Engineering*. 1992, Massachusetts Institute of Technology: Cambridge. p. 314.
18. Roger W. Barnard, K.P., Kendall C. Richards, *A Monotonicity Property Involving  $3F_2$  and Comparisons of the Classical Approximations of Elliptical Arc Length*. SIAM Journal on Mathematical Analysis (SIMA), 2000. **32**(2): pp. 403-419.

## ANNEXE III

### PROGRAMME ANSYS UTILISÉ POUR CRÉER LA GÉOMÉTRIE ET DÉFORMER ELLIPTIQUEMENT LE WG ET LE FS

```
FINISH
/CLEAR
/uis,msgpop,3
/CONFIG,NPROC,2
/NERR,2,99999999,,0,0
/TITLE, 3D MODEL
! Paramètres
pi=3.1415926536
zz=pi/360
fcoeffdents=0.16
fcoeffwg=0
!----- Wave Generator -----

axmaj=(62.xx)/2 ! Axe majeur de l'ellipse
axmin=(60.xx)/2 ! Axe mineur de l'ellipse
wght=1.55 ! Épaisseur du WG
! -----

!----- Flexible Spline -----
nteethfs=100
alphafs=360/nteethfs

rextfs=31.99765
htoothfs=0.762 ! Hauteur des dents
ltoothfs=1.4224 ! Largeur des dents
rtopfs=0.2286 ! Rayon du dessus des dents
rbottomfs=0.2032 ! Congé de raccordement des dents
rfl=1.7272 ! Rayon latéral des dents
refh=1.27 ! Pt. de reference horizontal du posi. du rayon latéral
rprof=0.381 ! Pt. de reference vertical du posi. du rayon latéral
th=0.15
! -----

! ----- Circular Spline -----
nteethcs=102
alphacs=360/nteethcs
rintcs=31.885255 ! Rayon interne
rextcs=33 ! 33.0 ! Rayon externe
htoothcs=0.6858 ! Hauteur des dents
ltoothcs=0.8128 ! Largeur des dents
rtopcs=0.1524 ! Rayon du dessus des dents
rbottomcs=0.0508 ! Congé de raccordement des dents
betal=0.0254
deta1=0.04564219272
rfl=1.7272 ! Rayon latéral des dents

! -----

*AFUN,DEG
! parameters
pi=3.14159265358979 ! circle constant
a=axmaj $ b=axmin ! ellipse axis
nt=nteethfs ! number of teeth
```



```

! radius computation: pi*a*b +/- pi*r^2
rc=SQRT(a*b)
re=2*pi*sqrt(1/2*(a**1+b**2))
! numerical integration (quadratic method)
ta=0 $ tb=90 ! integration bounds
nq=10000 ! number of intervals
*DIM,t,ARRAY,nq+1
*DIM,F,ARRAY,nq+1
*DIM,G,ARRAY,nq+1
dt=(tb-ta)/nq ! pas d'intégration
*DO,i,1,nq+1
  t(i)=(i-1)*dt
  *IF,t(i),EQ,0,THEN
    F(i)=SQRT(1+b**2/a**2*(-1))*ABS(-a*SIN(t(i)))
  *ELSE
    F(i)=SQRT(1+b**2/a**2*COS(t(i))**2/SIN(t(i))**2)*ABS(-a*SIN(t(i)))
  *ENDIF
*ENDDO
G(1)=0
dtr=dt*pi/180
*DO,i,1,nq,2
  G(i+1)=G(i)+(5*F(i)+8*F(i+1)-F(i+2))*dtr/12
  G(i+2)=G(i)+(F(i)+4*F(i+1)+F(i+2))*dtr/3
*ENDDO
S_quad=G(nq+1)
r=2*S_quad/pi
dtta=2*pi/nt

rintfs=r
abc=rintfs

/PREP7

!!!!!!!!!!!!!!!!!!CONSTANTES RÉELLES!!!!!!!!!!

!R,R1,R2,FKN,FTOLN,ICONT,PINB,
R,1,.1,1,.1,.1,0,0.5
RMORE,,,1E20,,,

!----- MODÉLISATION DES COMPOSANTES-----
!----- CIRCULAR SPLINE -----

ET,1,TARGE170
TSHAP,QUAD
TYPE,1

LOCAL,11,1,0,0,0,0,0,0,1
K,5,rintcs,360/204,0
K,1,rintcs+htoothcs-.03186578233,0,0
K,2,rintcs+htoothcs-.03186578233,0,1
K,16,rintcs+0*beta1,1.0341931303-0*delta1,0
K,17,rintcs+1*beta1,1.0341931303-1*delta1,0
K,18,rintcs+2*beta1,1.0341931303-2*delta1,0
K,19,rintcs+3*beta1,1.0341931303-3*delta1,0
K,20,rintcs+4*beta1,1.0341931303-4*delta1,0
K,21,rintcs+5*beta1,1.0341931303-5*delta1,0
K,22,rintcs+6*beta1,1.0341931303-6*delta1,0
CIRCLE,1,.1778,2,,60.84,1
BSPLINE,16,17,18,19
BSPLINE,19,20,21,22
K,6,rentcs,0,0

```

```

K,7,extcs,360/204,0
K,8,extcs,0.273397225,0
K,9,extcs,0.273397225*4.55,0
K,11,extcs,0.273397225*5.25,0
CSYS,0
L,4,22
L,16,5
LFILLT,3,4,.5
LFILLT,2,5,.2
LCOMB,2,3,0

```

```

LDELE,1,,0
LDELE,5,,0
LSEL,ALL
LCOMB,ALL,,0
ALLS
LSYMM,Y,ALL,,,0,0,0
K,66,0,0,0
K,67,0,0,-11
L,66,67
ADRAG,1,,,,,3,,,,
ADRAG,2,,,,,3,,,,

```

```

LESIZE,1,0,0,6,,,,
LESIZE,2,0,0,6,,,,
LESIZE,4,0,0,6,,,,
LESIZE,7,0,0,6,,,,

```

```

LESIZE,5,0,0,5,,,,
LESIZE,6,0,0,5,,,,
LESIZE,8,0,0,5,,,,
LESIZE,9,0,0,5,,,,
LPLOT

```

```

REAL,1
ASEL,ALL
ESIZE,0.2
MSHKEY,1
AMESH,ALL
ALLS
CSYS,1
NUMCMP,ALL

```

```

ASEL,S,AREA,,1
ESLA,S
ESURF,,REVERSE
ALLS
EGEN,nteethcs,800,ALL,,,,,,,,,alphacs
ALLS
NUMMRG,ALL

```

```

!-----

```

```

!----- FLEXIBLE SPLINE -----

```

```

ET,2,SOLID45
MP,DENS,2,.000007850
MP,EX,2,210000
MP,NUXY,2,0.3
MAT,2
TYPE,2

```

```

R,11,5
REAL,11

! On désélectionne tout
NSEL,NONE
ESEL,NONE
ASEL,NONE
TYPE,1 !DÉJÀ DÉFINI PLUS HAUT
MP,DENS,2,.000007850
MP,EX,2,210000
MP,NUXY,2,0.3
K,51,rentfs-rtopfs,0,0
K,52,rentfs-rtopfs,0,1
CIRCLE,51,rtopfs,52,,60.5,1
K,53,rintfs,360/100/2,0
K,54,rentfs-htoothfs,360/100/2,0
K,55,rentfs-htoothfs,1.0872541418,0 ! 0.513691291108 1.2726563723
K,56,rintfs,0,0
L,55,54
L,55,27
LFILLT,12,11,.2032
K,59,rintfs+htoothfs/2,0,0
K,61,rintfs+htoothfs/2,360/100/2,0 !K,61,rintfs/2+(rentfs-htoothfs)/2,360/100/2,0
K,62,rintfs+htoothfs/2,1.27,0 !K,62,rintfs/2+(rentfs-htoothfs)/2,1.27,0
K,63,rintfs,1.27,0
K,64,rintfs+htoothfs/2,0.73,0 !0.73
K,65,rintfs,0.73,0
K,66,rentfs-rtopfs,0.18,0

A,56,59,64,65
A,59,51,66,64
A,65,64,62,63
A,63,62,61,53
A,61,62,29,54
A,62,64,28,29
A,64,66,27,28
A,51,26,27,66
ASEL,S,AREA,,3,10,1,
K,67,0,0,-9
L,24,67
VDRAG,ALL,,,,,32,,,,

ALLS
ESIZE,th*5
VMESH,ALL

!ÉLÉMENTS DE CONTACT SUR LE FLEXIBLE SPLINE (DENTS)

ET,3,CONTA173
MP,MU,3,fcoeffdents
MAT,3
REAL,1
TYPE,3

KEYOPT,3,1,0 !DOF, UX,UY
KEYOPT,3,4,0
KEYOPT,3,5,2 !Reduce penetration with auto CNOF
KEYOPT,3,7,2
KEYOPT,3,9,3 !
KEYOPT,3,10,1 !Each substep based on mean stress of underlying elements from the previous
substep
KEYOPT,3,12,0 !STANDARD SURFACE FINISH (ROUGHNESS)

ASEL,S,AREA,,36
ASEL,A,AREA,,33
ESIZE,TH*6

```

```

AMESH,ALL
ASEL,S,AREA,,36
ASEL,A,AREA,,33
ESLA,S
ESURF,,REVERSE
EPLOT

```

```

!-----WAVE GENERATOR-----

```

```

MP,MU,6,fcoeffwg
!R1, R2, FKN, FTOLN, ICONT, PINB,
R,6,,,.1,.1,0,0.5
!PMAX, PMIN, TAUMAX, CNOF, FKOP, FKT,
RMORE,0,0,1E20,,,
TYPE,3 !CONTACT ENTRE LE WAVE GENERATOR ET LE FS
MAT,6
REAL,6

```

```

ASEL,S,AREA,,14
ASEL,A,AREA,,22
ASEL,A,AREA,,26
AMESH,ALL
ASEL,S,AREA,,14
ASEL,A,AREA,,22
ASEL,A,AREA,,26
ESLA,S
ESURF,,REVERSE

```

```

CSYS,1
K,76,RINTFS-WGHT,0,0
K,77,RINTFS-WGHT,360/NTEETHFS/2,0
K,78,rintfs,0,0
K,79,rintfs,360/100/2,0
K,95,0,0,-9 !PROFONDEUR DU WG
K,96,0,0,0
L,95,96
A,76,78,79,77
ASEL,S,AREA,,41,,,
VDRAG,ALL,,,,,70,,,,

```

```

TYPE,2 !ÉLÉMENTS BRIQUES
MP,DENS,8,.000007850 !SURFACE EXTERNE DU WG
MP,EX,8,210000
MP,NUXY,8,0.3
MAT,8
R,66,5
REAL,66
MSHKEY,1
VSEL,S,VOLU,,9
ESIZE,th*6
VMESH,ALL

```

```

TYPE,1 !ÉLÉMENTS TARGET SUR LE WG (CONTACT WG/FS)
REAL,6
ASEL,S,AREA,,43
ESIZE,TH*6
AMESH,ALL
ASEL,A,AREA,,43
ESLA,S
ESURF,,REVERSE

```

```

ESEL,S,TYPE,,2
ESEL,A,REAL,,6
ESEL,A,MAT,,3

```



```

CSYS,0
NSLE,S,ALL
NSYM,Y,500,ALL,,
ESYM,,500,ALL,,
ALLS
NUMCMP,NODE
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,KP

```

```

!RALLONGE DU FS
MAT,2
REAL,11
L,67,25
ASEL,S,AREA,,15
ASEL,A,AREA,,19
ASEL,A,AREA,,23
ASEL,A,AREA,,27
ASEL,A,AREA,,31
ASEL,A,AREA,,34
ASEL,A,AREA,,37
ASEL,A,AREA,,40
VDRAG,ALL,,,,,,,,83,,,,,

```

```

!ÉLEM CONTACT DENTS FS
ASEL,S,AREA,,36
ASEL,A,AREA,,72
TYPE,3
REAL,1
MAT,3
ESIZE,TH*6
AMESH,ALL
ASEL,S,AREA,,72
ESLA,S
ESURF,,REVERSE

```

```

VSYMM,Y,10,17,1,,0,0

```

```

ALLS

```

```

NUMCMP,NODE
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,KP

```

```

!JONCTION ENTRE LES SOLIDES ET LES SHELLS
! SECTION 7.2 DU HELP

```

```

ET,4,TARGE170 !ÉLÉMENT TARGET (SURFACE)
keyopt,4,5,4
et,5,Contal75 !ÉLÉMENTS CONTACT (POINT)
KEYOPT,5,1,0 !NOUVEAU
KEYOPT,5,2,2
KEYOPT,5,4,0
KEYOPT,5,11,1
KEYOPT,5,12,5

```

```

!R,NSET,R1,R2,FKN,FTOLN,ICONT,PINB
R,15,,,,,

```

```

MAT,2
TYPE,4

```

```

REAL,15
ESEL,S,ELEM,,6627
ESEL,A,ELEM,,6636
ESEL,A,ELEM,,6639
ESEL,A,ELEM,,6663
ESEL,A,ELEM,,6672
ESEL,A,ELEM,,6675
NSLE,S
NSEL,R,LOC,Z,-11
ESURF !GÉNÉRATION DES ÉLÉMENTS TARGET SUR LA SURFACE DU FS
ESEL,S,TYPE,,2 !ÉLÉMENTS SOLID45 (FS + WG)
ESEL,A,TYPE,,4 !TARGET POUR JONCTION DOS FS + SHELL
ESEL,A,REAL,,6 !CONTACT PAIR ENTRE WG ET FS
ESEL,A,MAT,,3 !CONTACT SUR FS (DENTS)
CSYS,1
EGEN,100,1000,ALL,,,,,,,,,alphafs
ALLS
NUMCMP,NODE
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,KP

```

```

ESEL,S,REAL,,11
NSLE,S
NUMMRG,NODE

```

```

ET,6,SHELL93
MP,DENS,9,.000007850
MP,EX,9,210000
MP,NUXY,9,0.3
MAT,2
TYPE,6 !Éléments SHELL
RADIUS=(61.36/2+62.12/2)/2
EP=(62.12/2-61.36/2)

```

```

K,250,0,0,-11
K,251,0,0,-31.2
L,250,251
CIRCLE,250,RADIUS,251,,360,180
LSEL,S,LOC,Z,-11
CSYS,1
LSEL,R,LOC,X,RADIUS-.1
LSEL,R,LENGTH,,.5,10
ADRA,ALL,,,,,,,,180,,,,
R,9,EP,EP,EP,EP
REAL,9

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

! ON 'COLLE' ENSEMBLE LES NOEUDS
ESEL,S,REAL,,66 !LE WG
NSLE,S,ALL
NUMMRG,NODE

```

```

ESEL,S,TYPE,,2 !LE FS
ESEL,U,REAL,,66
NSLE,S,ALL
NUMMRG,NODE

```

```

ESEL,S,TYPE,,1 !LE CS
NSLE,S,ALL
NUMMRG,NODE

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
PARTIE ARRIÈRE

```

```

*AFUN,DEG

```

```

rent=30
trou=10
renf=20

ET,10,SOLID92
MP,DENS,10,.000007850
MP,EX,10,210000
MP,NUXY,10,0.3

WPOFFS,0,0,-31.2
CYL4,0,0,RENF,0,RADIUS,2,0
ASEL,S,AREA,,294
ASEL,A,AREA,,295
AGLUE,ALL

!MAILLAGE DE LA MEMBRANE
R,10,.4,.4,.4      !ÉPAISSEUR DE LA MEMBRANE DU COUVERT
REAL,10
TYPE,6
MAT,2
ESIZE,4
ASEL,S,AREA,,296
MSHKEY,0
AMESH,ALL

R,11,EP,EP,EP,EP    !ÉPAISSEUR DE LA MEMBRANE DU COUVERT
REAL,11
TYPE,6
MAT,2
ESIZE,4
ASEL,S,AREA,,294
MSHKEY,0
AMESH,ALL

ESEL,S,TYPE,,6
CSYS,1
EGEN,180,100,ALL,,,,,,,,,2

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!GÉNÉRATION DE LA JONCTION ENTRE LES SHELLS ET LES SOLIDES
ESEL,S,TYPE,,6 !Pour coller les éléments contact node aux shells
nsle,s
nsel,r,loc,Z,-11
TYPE,5
real,15
ESURF
save
ALLS

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

*AFUN,DEG
! parameters
pi=3.14159265358979      ! circle constant
a=axmaj-5.75 $ b=axmin-5.75      ! ellipse axis
nt=n teethfs      ! number of teeth

! radius computation:  $\pi \cdot a \cdot b \pm \pi \cdot r^2$ 
rc=SQRT(a*b)
re=2*pi*sqrt(1/2*(a**1+b**2))
! numerical integration (quadratic method)

```

```

ta=0 $ tb=90                ! integration bounds
nq=10000                    ! number of intervals
*DIM,t,ARRAY,nq+1
*DIM,F,ARRAY,nq+1
*DIM,G,ARRAY,nq+1
dt=(tb-ta)/nq              ! pas d'intégration
*DO,i,1,nq+1
  t(i)=(i-1)*dt
  *IF,t(i),EQ,0,THEN
    F(i)=SQRT(1+b**2/a**2*(-1))*ABS(-a*SIN(t(i)))
  *ELSE
    F(i)=SQRT(1+b**2/a**2*COS(t(i))**2/SIN(t(i))**2)*ABS(-a*SIN(t(i)))
  *ENDIF
*ENDDO
G(1)=0
dtr=dt*pi/180
*DO,i,1,nq,2
  G(i+1)=G(i)+(5*F(i)+8*F(i+1)-F(i+2))*dtr/12
  G(i+2)=G(i)+(F(i)+4*F(i+1)+F(i+2))*dtr/3
*ENDDO
S_quad=G(nq+1)
r=2*S_quad/pi
dtt=2*pi/nt

rintfs=r

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

NSEL,S,LOC,Y,30,150
ESLN,S,ALL
ESEL,R,MAT,,1 !ÉLÉMENTS DU CS
NSLE,S,ALL
EDELE,ALL
NDELE,ALL

NSEL,S,LOC,Y,210,330
ESLN,S,ALL
ESEL,R,MAT,,1 !ÉLÉMENTS DU CS
NSLE,S,ALL
EDELE,ALL
NDELE,ALL

NSEL,S,LOC,Y,30,150
ESLN,S,ALL
ESEL,R,MAT,,3 !ÉLÉMENTS DU FS
ESEL,R,REAL,,1
NSLE,S,ALL
EDELE,ALL
NDELE,ALL

NSEL,S,LOC,Y,210,330
ESLN,S,ALL
ESEL,R,MAT,,3 !ÉLÉMENTS DU FS
ESEL,R,REAL,,1
NSLE,S,ALL
EDELE,ALL
NDELE,ALL

esel,s,type,,6
nsle,s
nummrg,node

ALLS
NUMCMP,NODE
NUMCMP,ELEM

```

!numero des noeuds+POSITION INITIALE du FS (RAYON INTERNE PARTIE ARRIÈRE (SHELL))



```

ESEL,S,TYPE,,6
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,Z,-31.2
CSYS,1
NSEL,R,LOC,X,20
CSYS,0
*GET,NDMINWGG,NODE,O,NUM,MIN !NOEUD AYANT LE NUMERO LE MOINS ELEVE
*GET,NDMAXWGG,NODE,O,NUM,MAX !NOEUD AYANT LE NUMERO LE PLUS ELEVE
*GET,NODEFSWGG,NODE,,COUNT !NOMBRE DE NOEUD DU FS
*DIM,INIPOSIFSWGG,array,25,NODEFSWGG !crée le vecteur de POSITION INITIALE de tous les
noeuds DU FS
I=1
NEXTNODEINSELECTEDSET=7/1222
*DOWHILE,NEXTNODEINSELECTEDSET
*IF,NEXTNODEINSELECTEDSET,LT,NDMINWGG,THEN
NOEUDTRAITE=NDMINWGG
*ELSE
NOEUDTRAITE=NEXTNODEINSELECTEDSET
*ENDIF
*GET,POSIXWG,NODE,NOEUDTRAITE,LOC,X,,
*GET,POSIYWG,NODE,NOEUDTRAITE,LOC,Y,,
INIPOSIFSWGG(1,I)=NOEUDTRAITE !ON REMPLIT LE VECTEUR
INIPOSIFSWGG(2,I)=POSIXWG
INIPOSIFSWGG(3,I)=POSIYWG
*GET,NEXTNODEINSELECTEDSET,NODE,NOEUDTRAITE,NXTH
I=I+1
*ENDDO
CSYS,1
!-----

NSEL,S,LOC,Z,-31.2 !ROTATION DES NOEUDS DE L'ARRIÈRE DU FS POUR BLOCAGE RADIAL
CSYS,1
NSEL,R,LOC,X,20
NROTAT,ALL

ALLS

!MODÉLISATION DES BILLES FLEXIBLES

/STAT,GLOBAL

WPOFFS,0,0,31.2
CSYS,0

CYLIND,24.882,23.882,-4,-4.5,0,1
CYLIND,24.882,23.882,-4.5,-5,0,1

VSEL,S,VOLU,,26,27
ESIZE,3
ET,15,SOLID45
TYPE,15 !ÉLÉMENTS BRIQUES 20 NOEUDS
MP,DENS,15,.000007850 !SURFACE EXTERNE DU WG
MP,EX,15,2000000000 !00 !très rigide
MP,NUXY,15,0.3
MAT,15
MSHKEY,1
!MSHAPE,1,3D
VMESH,ALL

ESEL,S,TYPE,,15
CSYS,1
EGEN,360,100,ALL,,,,,,,,,1

ESEL,S,TYPE,,15
NUMMRG,ELEM
NSLE,S,ALL

```

```

NUMMRG,NODE
NUMCMP,NODE
ALLS

```

```

!Rotation des noeuds du CS et de l'anneau pour qu'ils soient dans un système cylindrique.
!DE FAÇON À CE QUE LES LINK POUSSENT RADIALEMENT LE CS
ESEL,S,TYPE,,15      !ANNEAU INTÉRIEUR
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,X,24.882
NROTAT,ALL

```

```

ESEL,S,REAL,,66
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,Z,-5,-4
NSEL,R,LOC,X,29.081
NROTAT,ALL
ALLS

```

```

! POUR SIMULER LES BILLES
!ET, ITYPE, Ename, KOP1, KOP2, KOP3, KOP4, KOP5, KOP6, INOPR
ET,20, LINK10,,,1    !
R,20,10 !SECTION DES LINK (mm)
MP,DENS,20,.0000007850!FAIBLE MASSE VOLUMIQUE
MP,EX,20,15918
MP,ALPX,20,6.5E-6
MP,DAMP,20,.05

```

```

MAT,20
REAL,20
TYPE,20

```

```

E,66077,3110
E,66174,5575
E,66264,8638
E,66360,10731
E,66456,13115
E,66546,16178
E,66642,18271
E,66738,20634
E,66828,23718
E,66924,25875
E,67020,28174
E,67110,31258
E,67206,33415
E,67296,35714
E,67392,38798
E,67488,40955
E,67584,43254
E,67674,46111
E,67770,48495
E,67860,50794
E,67956,53651
E,68052,56035
E,68142,59098

```

```

! POUR RETENIR LES LINK ENSEMBLES
R,21,1 !SECTION DES LINK (mm)
MP,DENS,21,.0000007850!FAIBLE MASSE VOLUMIQUE
MP,EX,21,15918/2
MP,ALPX,21,6.5E-6
MP,DAMP,21,.05

```

```

MAT,21
REAL,21
TYPE,20

```

```

E,3110,5575
E,5575,8638
E,8638,10731
E,10731,13115
E,13115,16178
E,16178,18271
E,18271,20634
E,20634,23718
E,23718,25875
E,25875,28174
E,28174,31258
E,31258,33415
E,33415,35714
E,35714,38798
E,38798,40955
E,40955,43254
E,43254,46111
E,46111,48495
E,48495,50794
E,50794,53651
E,53651,56035
E,56035,59098
E,59098,3110

```

```

E,66077,66174
E,66174,66264
E,66264,66360
E,66360,66456
E,66456,66546
E,66546,66642
E,66642,66738
E,66738,66828
E,66828,66924
E,66924,67020
E,67020,67110
E,67110,67206
E,67206,67296
E,67296,67392
E,67392,67488
E,67488,67584
E,67584,67674
E,67674,67770
E,67770,67860
E,67860,67956
E,67956,68052
E,68052,68142
E,68142,66077

```

```

/WAIT,5

```

```

!DÉFORMATION ELLIPTIQUE

```

```

CSYS,1

```

```

! equal circonférences

```

```

! ellipse:  $x_e = a \cos(bta)$ ,  $y_e = b \sin(bta)$ 

```

```

! circle:  $x_r = r \cos(tta)$ ,  $y_r = r \sin(tta)$ 

```

```

! at a given point on the inner circle the accumulated trajectory taken from origin is

```

```

!  $ds = r \cdot dtta$ 

```

```

! using arc computation:  $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ 

```

```

! for an ellipse:  $dx/dbta = -a \sin(bta)$ ,  $dy/dbta = b \cos(bta)$ 

```

```

! ==>  $\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = \sqrt{1 + b^2/a^2 \cdot (\cos(bta)/\sin(bta))^2}$ 

```

```

! ==>  $s = \int (ds) = r \cdot tta = \int [\sqrt{1 + b^2/a^2 \cdot (\cos(bta)/\sin(bta))^2} \cdot (-a \sin(bta) \cdot dbta)]$ 

```

```

! computation for bta, corresponding angle on the elliptic curve of a point on the inner
circle at an angle tta

```

```

*DIM,ri,ARRAY,4

```

```

*DIM,dri,ARRAY,4

```

```

! 3 Gauss points

```

```

nG=3
ri(1)=-sqrt(3/5), 0, sqrt(3/5) ! Gauss points
dri(1)=5/9, 8/9, 5/9          ! weights
! 4 Gauss points
nG=4
ri(1)=-sqrt((3+2*sqrt(6/5))/7), -sqrt((3-2*sqrt(6/5))/7), sqrt((3-2*sqrt(6/5))/7),
sqrt((3+2*sqrt(6/5))/7)
dri(1)=1/2-1/(6*sqrt(6/5)), 1/2+1/(6*sqrt(6/5)), 1/2+1/(6*sqrt(6/5)), 1/2-1/(6*sqrt(6/5))

CSYS,1

ESEL,S,REAL,,15
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,X,23.882
NSEL,R,LOC,Z,-4.5

*GET,nt,NODE,,COUNT
*DIM,nd,ARRAY,nt
*DIM,tta,ARRAY,nt
*DIM,bta,ARRAY,nt

! initialisation
epsilon=1e-6
ni=NODE(r-wght,0,0)

nd(1)=ni
tta(1)=NY(ni)
bta(1)=tta(1)
dtta=360/nt
NSEL,U,NODE,,ni
jjmax=20

*DO,j,1,nt-1
  CSYS,0
  ttaj=tta(1)+j*dtta
  xi=r*COS(ttaj) $ yi=r*SIN(ttaj)
  ni=NODE(xi,yi,0)
  nd(j+1)=ni
  CSYS,1
  tta(j+1)=NY(ni) ! node angle in cylindrical coordinate system
  *IF,tta(j+1),LT,0,THEN
    tta(j+1)=tta(j+1)+360
  *ENDIF
  s_tta=r*tta(j+1)*pi/180 ! arc length until ni
  dbta=dtta*pi/180
  s_bta=s_tta
  dc=1e3
  corr=0
  k=0
  *DO,jj,1,jjmax
    *IF,dc,GT,epsilon,THEN
      dbta=dbta*(1+corr)
      btam=bta(j)*pi/180+dbta/2
      delta_bta=dbta
      s_bta=r*((tta(j+1)-dtta)*pi/180)
      *DO,i,1,nG
        btar=(btam+ri(i)*delta_bta/2)*180/pi
        Fr=sqrt(1+b**2/a**2*(cos(btar)/sin(btar))**2)*abs(-a*sin(btar))*delta_bta/2
        s_bta=s_bta+Fr*dri(i)
      *ENDDO
      dc=abs(corr-(s_tta-s_bta)/s_tta)
      corr=(s_tta-s_bta)/s_tta
      k=k+1
    *ELSE
      !*ASK,go, ok?
      *EXIT
    *ENDIF
  *ENDDO

```



```

      bta(j+1)=bta(j)+dbta*180/pi
      NSEL,U,NODE,,ni
*ENDDO

/WAIT,5

!-----SOLUTION-----

ALLS
/SOLU
ANTYPE,STATIC
OUTRES,ALL,LAST,
NLGEOM,OFF

NROPT,AUTO
EQSLV,SPARSE,,
PRECISION,double
TIME,25
AUTOTS,ON
SOLCONTROL,ON,1
NSUBST,2,2,2

CSYS,0
ESEL,S,TYPE,,1
ESEL,R,MAT,,1
NSLE,S,ALL
D,all,all,0

NSEL,S,LOC,Z,-31.2      !EXTRÉMITÉ DU FS (PARTIE ARRIÈRE)
CSYS,1
NSEL,R,LOC,X,20
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
D,ALL,UZ,0
alls

esel,s,real,,66
nsle,s,all
d,all,uz,0

esel,s,type,,15
nsle,s,all
d,all,uz,0

CSYS,0

ALLS
!CHARGEMENT ELLIPSOIDAL ok

*DO,I,1,nt
      bta(i)=bta(i)
      tta(i)=tta(i)
      D,nd(i),UX,(a*COS(bta(i))-r*COS(tta(i)))
      D,nd(i),UY,(b*SIN(bta(i))-r*SIN(tta(i)))
*ENDDO

alls
SOLVE
SAVE,k37900
PARSAV,SCALAR
FINISH
/POST1

```

## ANNEXE IV

### PROGRAMME ANSYS UTILISÉ POUR APPLIQUER LE COUPLE SUR LE FS

```
FINISH
/wait,10
```

```
RESUME,k37900
```

```
ALLS
```

```
FINISH
```

```
/SOLU
ANTYPE,STATIC,REST,1,,CONTINUE
NROPT,AUTO
NROPT,UNSYM
PRECISION,DOUBLE
TIME,26
AUTOTS,ON
SOLCONTROL,ON,0,
NSUBST,30,30,30
```

```
ESEL,S,TYPE,,6 !ON ENLÈVE TOUS LES ANCIENS DOF À L'ARRIÈRE DU FS (SHELL)
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,Z,-31.2
CSYS,1
NSEL,R,LOC,X,20
DDELE,ALL,ALL
```

```
ESEL,S,TYPE,,6 !LES NOUVEAUX DOF
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,Z,-31.2
CSYS,1
NSEL,R,LOC,X,20
D,ALL,ROTX,0 !BLOCAGE DE LA ROTATION EN X (FLEXION DES ÉLÉMENTS SHELL)
D,ALL,UZ,0
CSYS,1
```

```
!APPLICATION DES FORCES
```

```
ALLS
```

```
FORCE=8 !FORCE RÉSUlTANTE DE X NEWTON PAR NOEUD (FORCE TANGENTIELLE)
```

```
      *DO,I,1,NODEFSWGG,1
          NSEL,S,NODE,,INIPOSIFSWGG(1,I)
          F,ALL,FY,FORCE
      *ENDDO
```

```
ALLS
```

```
*DO,w,1,NODEFSWGG,1
```

```
*IF,INIPOSIFSWGG(3,w),EQ,0,AND,INIPOSIFSWGG(2,w),GT,0,THEN
INIPOSIFSWGG(4,w)=0
```

```
*ELSEIF,INIPOSIFSWGG(3,w),EQ,0,AND,INIPOSIFSWGG(2,w),LT,0,THEN
INIPOSIFSWGG(4,w)=180
```

```
*ELSEIF,INIPOSIFSWGG(3,w),GT,0,AND,INIPOSIFSWGG(2,w),EQ,0,THEN      !POUR NE PAS DIVISER PAR 0
INIPOSIFSWGG(4,w)=90
```

```

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(3,w), LT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(2,w), EQ, 0, THEN      !POUR NE PAS DIVISER PAR 0
INIPOSIFSWGG(4,w)=270

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(3,w), GT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(2,w), GT, 0, THEN      !1ER QUADRANT
INIPOSIFSWGG(4,w)=ATAN((INIPOSIFSWGG(3,w))/(INIPOSIFSWGG(2,w)))

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(3,w), GT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(2,w), LT, 0, THEN      !2E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(4,w)=180-ATAN((INIPOSIFSWGG(3,w))/ABS((INIPOSIFSWGG(2,w))))

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(3,w), LT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(2,w), LT, 0, THEN      !3E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(4,w)=180+ATAN(ABS((INIPOSIFSWGG(3,w)))/ABS((INIPOSIFSWGG(2,w))))

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(3,w), LT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(2,w), GT, 0, THEN      !4E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(4,w)=360-ABS(ATAN((INIPOSIFSWGG(3,w))/(INIPOSIFSWGG(2,w))))

*ENDIF
*ENDDO

ALLS

SOLVE
FINISH
/POST1
/CONTOUR,,256
ALLS

!VECTEUR DES NOEUDS DÉPLACÉS DU FS (UX ET UY) APRÈS LE COUPLE APPLIQUÉ
CSYS,0
*DO,I,1,NODEFSWGG,1
NOEUDTRAITE=INIPOSIFSWGG(1,I)
DEPUX=UX(NOEUDTRAITE)
DEPUY=UY(NOEUDTRAITE)
INIPOSIFSWGG(5,I)=DEPUX
INIPOSIFSWGG(6,I)=DEPUY
*ENDDO

!POSITION EN X, EN Y APRÈS L'APPLICATION DU COUPLE
*DO,I,1,NODEFSWGG,1
INIPOSIFSWGG(7,I)=INIPOSIFSWGG(2,I)+INIPOSIFSWGG(5,I)      !X+UX+UX
INIPOSIFSWGG(8,I)=INIPOSIFSWGG(3,I)+INIPOSIFSWGG(6,I)      !Y+UY+UY
*ENDDO

/wait,10

!ALPHA APRÈS LE COUPLE APPLIQUÉ
*DO,w,1,NODEFSWGG,1

*IF, INIPOSIFSWGG(8,w), EQ, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), GT, 0, THEN
INIPOSIFSWGG(9,w)=0

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w), EQ, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), LT, 0, THEN
INIPOSIFSWGG(9,w)=180

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w), GT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), EQ, 0, THEN      !POUR NE PAS DIVISER PAR 0
INIPOSIFSWGG(9,w)=90

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w), LT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), EQ, 0, THEN      !POUR NE PAS DIVISER PAR 0
INIPOSIFSWGG(9,w)=270

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w), GT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), GT, 0, THEN      !1ER QUADRANT
INIPOSIFSWGG(9,w)=ATAN((INIPOSIFSWGG(8,w))/(INIPOSIFSWGG(7,w)))

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w), GT, 0, AND, INIPOSIFSWGG(7,w), LT, 0, THEN      !2E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(9,w)=180-ATAN((INIPOSIFSWGG(8,w))/ABS((INIPOSIFSWGG(7,w))))

```

```

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w),LT,0,AND, INIPOSIFSWGG(7,w),LT,0,THEN      !3E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(9,w)=180+ATAN(ABS((INIPOSIFSWGG(8,w)))/ABS((INIPOSIFSWGG(7,w))))

*ELSEIF, INIPOSIFSWGG(8,w),LT,0,AND, INIPOSIFSWGG(7,w),GT,0,THEN      !4E QUADRANT
INIPOSIFSWGG(9,w)=360-ABS(ATAN((INIPOSIFSWGG(8,w))/(INIPOSIFSWGG(7,w))))

*ENDIF
*ENDDO

! ALPHA2-ALPHA1
*DO, I, 1, NODEFSWGG, 1
INIPOSIFSWGG(10,I)=(ABS(INIPOSIFSWGG(9,I))-ABS(INIPOSIFSWGG(4,I)))
*ENDDO

!calcul de alpha
ZZZZZZ=0      !INITIALISATION
*DO, I, 1, NODEFSWGG, 1
zzzzzz=zzzzzz+INIPOSIFSWGG(10,I)
*ENDDO
anglederotation=(zzzzzz)/(NODEFSWGG)

!CALCUL DU COUPLE APPLIQUÉ (N-mm)
couple=0      !INITIALISATION
*DO, I, 1, NODEFSWGG, 1
couple=couple+20*FORCE
*ENDDO

PARSAV, ALL, PARAM2, ,
SAVE, NEC

```



## LISTE DE RÉFÉRENCES

- Cook, Robert D., Malkus, David S., Plesha, Michael E., Witt, Robert J. . 2002. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Dhaouadi, Rached, Gorbel, Fathi H., Gandhi, Prasanna S. . 2003. « A New Dynamic Model of Hysteresis in Harmonic Drives ». *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 50, n° 6 (6 December 2003), p. 1165-1171.
- Dong Hyun Kim, Kwang Seop Jeong, Dai Gil Lee, Se Hoon Oh. 1995. « Manufacturing of the traction drive with the glass fiber epoxy composite material ». *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 48, (1995), p. 333-339.
- Ghorbel, Fathi H., Gandhi, Prasanna S., Alpeter, Friedhelm 2001. « On the Kinematic Error on Harmonic Drive Gears ». *Journal of Mechanical Design*, vol. 123, (2001), p. 90-97.
- Godler, Yvan, Hashimoto, Minoru, Horiuchi, Masachi, Ninomiya, Tamotsu. 2001. « Performance of Gain-Tuned Harmonic Drive Torque Sensor Under Load and Speed Conditions ». *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 6, n° 2 (June), p. 155-160.
- H.D. Systems Inc. « Cup Type Component Sets & Housed Units ». Hauppauge: H.D. Systems Inc.
- Han Su Jeon, Se Hoon Oh. 1999. « A study on stress and vibration analysis of a steel and hybrid flexspline for harmonic drive ». *Composite Structures*, vol. 47, (1999), p. 827-833.
- Hashimoto, Minoru, Kiyosawa, Yoshihide 1998. « Experimental Study on Torque Control Using Harmonic Drive Built-in Torque Sensors ». *Journal of Robotic Systems*, (1998), p. 435-445.
- Hashimoto, Minoru, Kiyosawa, Yoshihide, Paul, Richard P. . 1993. « A Torque Sensing Technique for Robots with Harmonic Drives ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, n° 1 (1993), p. 108-116.
- Hidaka, T., Ishida, T., Zhang, Y., Sasahara, M., Tanioka, Y. 1990. « Vibration of a strain wave gearing in an industrial robot ». In *International Power Transmission and Gearing Conference*, sous la dir. de IEEE. p. 789-794. IEEE.
- Hsia, Lih-Min 1988. « The Analysis and Design of Harmonic Gear Drives ». In *1988 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS* (August 8-12), sous la dir. de IEEE. Vol. 1, p. 616-619. Beijing, China: IEEE.

- Huang, Shuiping, Ishida, Takeshi, Hidaka, Teruaki. 1994. « Experimental Study on Load Transmission of Strain Wave Gearing ». Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 60, n° 578, p. 3526-3532.
- Ishida, Takeshi, Zhang, Xin-yue, Hidaka, Teruaki, Sasahara, Masakatsu, Maruyama, Akira. 1995. « Root Stress on Flexible Spline of Strain Wave Gearing ». Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 61, n° 584, p. 1669-1676.
- Kayabasi, Oguz, Erzincanli, Fehmi 2005. « Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modelling ». Materials and Design, vol. 28, (2005), p. 441-447.
- Khial, Karim. 2001. « Commande en position d'un servo-système incluant un réducteur harmonique avec mesure de couple et compensation de non linéarités. ». Montréal, École polytechnique de Montréal, 139 p.
- Kikuchi, Masanori, Nitta, Ryuuta, Kiyosawa, Yoshihide, Zhang, Xin-Yue 2003. « Stress Analysis of Cup Type Strain Wave Gearing ». Key Engineering Materials, vol. 243-244, (2003), p. 129-134.
- Kircanski, Nenad M., Goldenberg, Andrew A. . 1997. « An Experimental Study of Nonlinear Stiffness, Hysteresis, and Friction Effects in Robot Joints with Harmonic Drives and Torque Sensors ». The International Journal of Robotics Research, vol. 16, n° 2 (1997), p. 214-239.
- Kiyosawa, Y., Ishikawa, S. 1989. « Performance of a Strain Wave Gearing Using a New Tooth Profile ». In *ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, sous la dir. de ASME. Vol. 11. ASME.
- Kondo, K., Takada, J. 1990. « Study on Tooth Profiles of the Harmonic Drives ». ASME Journal of Mechanical Design, vol. 112, (1990), p. 131-137.
- Legnani, Giovanni, Faglia, Rodolfo. 1992. « Harmonic drive transmissions: the effects of their elasticity, clearance and irregularity on the dynamic behaviour of an actual SCARA robot ». Robotica, vol. 10, (1992), p. 369-375.
- Maiti, Rathindranath 2004. « A Novel Harmonic Drive with a Pure Involute Tooth Gear Pair ». Journal of Mechanical Design, vol. 126, (January 2004), p. 178-182.
- Margulis, M.V., Volkov, D.P. 1987. « Calculation of the Torsional Rigidity of a Harmonic Power Drive with a Disc Generator ». Vestnik Mashinostroyeniya, vol. 67, n° 6 (1987), p. 17-20.

- Marilier, T., Richard, J.A. 1989. « Non-Linear Mechanic and Electric Behavior of a Robot Axis with a Harmonic-Drive Gear ». *Robotics & Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 5, n° 2-3 (1989), p. 129-136.
- Oh, Hee Seok, Jeong, Kwang Seop, Lee, Dai Gil. 1994. « Design and manufacture of the composite flexspline of a harmonic drive with adhesive joining ». *Composite Structures*, vol. 28, n° 3, p. 307-314.
- Se Hoon Oh, Seung Hwan Chang, Dai Gil Lee. 1997. « Improvement of the dynamic properties of a steel-composite hybrid flexspline of a harmonic drive ». *Composites Structures*, vol. 38, n° 1-4 (1997), p. 251-260.
- Seyfferth, W., Maghza, A.J., Angeles, J. 1995. « Nonlinear Modeling and Parameter Identification of Harmonic Drive Robotic Transmissions ». In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (1995), sous la dir. de IEEE. p. 3027-3032. Nagoya, Japan: IEEE.
- Sugimoto, Nobuyuki, Ishida, Takeshi, Hidaka, Teruaki, Sasahara, Masakatsu, Tanioka, Yoshihiro. 1993. « Calculation of the Torsional Rigidity of Strain-Wave Gearing by Finite Element Method ». *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 59, n° 563, p. 2239-2244.
- Taghirad, H.D. , Bélanger, P.R. . 2001. « H infinity-Based Robust Torque Control of Harmonic Drive Systems ». *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 123, (2001), p. 338-345.
- Taghirad, H.D., Bélanger, P.R. 1996. « An Experimental Study on Modelling and Identification of Harmonic Drive Systems ». In *35th Conference on Decision and Control* (1996), sous la dir. de IEEE. p. 4725-4730. Kobe, Japan: IEEE.
- Tuttle, Timothy D., Seering, Warren P. . 1996. « A Nonlinear Model of a Harmonic Drive Gear Transmission ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, n° 3 (1996), p. 368-374.
- Tuttle, Timothy Douglas. 1992. « Understanding and modeling the behavior of a harmonic drive gear transmission ». Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 314 p.
- Unknown. 2007. *C. Walton Musser's Development of Harmonic Drive Gearing*. En ligne. <<http://www.waltnusser.org/HD.htm>>.
- Yanabe, Shigeo, Ishizuka, Shinichi, Yamaguchi, Toshiaki, Ikeda, Masaki. 1989. « Torsional Stiffness of Harmonic Drive Reducers ». *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 55, n° 509, p. 216-221.

Zhang, Xin-yue, Ishida, Takeshi, Hidaka, Teruaki, Sasahara, Masakatsu, Kiyosawa, Yoshihide, Maruyama, Akira. 1996. « Effect of Assembly Error on Bending Stress on Flexible Spline of Strain Wave Gearing ». Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 62, n° 598, p. 2442-2449.